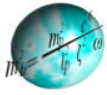


100 Jahre Schrödinger-Gleichung

auf den Spuren von Fourier bis Dirac

$$(D - m)\psi = 0$$

	Seite
0. Einführung und Motivation	2
1. Ausgangsbedingungen und Definition sinusartiger Funktionen	4
2. Kombination linearer Gleichungen	9
3. Quadrierung und Integration	13
4. Zusammenhänge mit anderen Teilfunktionen	16
5. Fourier-Analysen und Transformationen in den komplexen Zahlenbereich	20
6. Verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitsdichte 1. Ordnung über die Polarform	29
7. Transformationen mittels spektraler Energiefunktionen und deren Verteilung	30
8. Wahrscheinlichkeitsdichten und deren Verteilungen über sinusartige Funktionen	35
9. Quantenmechanische Verallgemeinerungen über die Näherungsfunktionen	38
10. Herleitung der stationären Schrödinger-Gleichung mittels Ableitungsoperatoren	44
11. Spezielle Relativitätstheorie und die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung	47
12. Von Problemlösungsversuchen zu symmetrischen Matrizen	51
13. Versuch einer unkonventionellen Herleitung der freien Dirac-Gleichung	53
14. Pauli-Matrizen, eine Determinante und die Minkowski-Raumzeit	60
15. Die freie Dirac-Gleichung: Interpretationen, Bestätigungen und eine Vorhersage	64
16. Wellenfunktionen für alle Fälle	70
17. Da fehlt(e) noch etwas oder der nächste Wink mit dem Zaunpfahl	80



Einführung und Motivation

Vor gut 100 Jahren am 27. Januar 1926 reichte Erwin Schrödinger seine nach ihm benannte nichtrelativistische Wellengleichung offiziell ein.

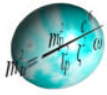
In den zwei Jahren danach vervollständigte Paul Dirac diese Gleichung, indem er sie perfekt an die Gegebenheiten der Speziellen Relativitätstheorie Albert Einstein's anpasste. Schrödinger und Dirac erhielten dafür 1933 den Nobelpreis.

Dafür nutzte Dirac die Vorarbeiten von Wolfgang Pauli mittels der nach letzterem benannten Matrizen. Pauli erhielt 1945 den Nobelpreis, allerdings für sein Ausschließungsprinzip bezüglich der Besetzung von Quantenzuständen für Fermionen.

Diracs Wellengleichung beschrieb damit nicht nur die Spinzustände $\pm \frac{1}{2} \hbar$ von Elektronen, sondern mithilfe seiner Gleichung sagte er auch gleichzeitig die Existenz von Positronen und damit von Antimaterie voraus. Der experimentelle Nachweis von Positronen gelang C. D. Anderson 1932, für welchen er 1936 den Nobelpreis erhielt.

Durch Integration von allen relevanten Potentialen in den nach ihm benannten mathematischen Operator, den Dirac-Dolch, konnten nunmehr alle quantenmechanischen Aspekte der elektromagnetischen Kraft hinsichtlich Fermionen- und Bosonensysteme falsifiziert werden und hielten den experimentellen Ergebnissen mit einer faszinierenden Genauigkeit stand. Auf dieser Basis wurde die umfassende Quantenelektrodynamik von Richard Feynman, Julian Schwinger und Shin'ichirō Tomonaga entwickelt (Nobelpreise 1965). In diese ging auch die Störungstheorie mit ein, welche nun auch die Wirkung des Quantenvakuums auf die elektromagnetischen Wechselwirkungen mit einbezog. Das gipfelte in der Berechnung des im Vorfeld gemessenen anomalen magnetischen Moments mit einer Genauigkeit von elf Stellen hinter dem Komma.

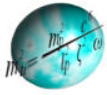
Wie so oft ist auch das noch lange nicht das Ende der quantenphysikalischen Fahnenstange. Denn es fehlt immer noch ein entscheidender Aspekt, der so richtig nicht in die lineare und



raumzeitglatte Struktur der Quantenmechanik hineinpassen will: Die Krümmung einer quantisierten Raumzeit durch die Effekte der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie. Als Übertheorie der Quantenmechanik sozusagen: Eine Theorie der Quantengravitation.

Ich glaube, dass nicht nur ich den wissenschaftlichen Leistungen der oben genannten und aller anderen in diesem Zusammenhang mitwirkenden Protagonisten sowie den noch bevorstehenden Herausforderungen höchsten Respekt zolle. Aber damit allein will man sich nicht zufriedengeben. Irgendwie möchte man eine Ahnung davon haben, wie die ganzen Sachen zusammenhängen und wie man zu den mathematisch-physikalischen Ergebnissen gekommen ist. Man möchte sich nicht damit abgeben, dass diese ganzen quantenmechanischen Aha-Effekte in den Köpfen von einigen Experten ihr gut behütetes Geheimnis fristen. Deshalb habe ich mich entschlossen, Ihnen den schon eingeschlagenen Weg vom historischen Ursprung bis hin zur Einbeziehung der Gravitation, soweit als möglich nachvollziehbar aufzuzeigen. Und zwar durch eine Gratwanderung über die Grenzen der Populärwissenschaft hinaus, aber unterhalb der schroffen Gipfel eines physikalischen und mathematisch versiert wandelnden Wissenschaftstheoretikers. Das setzt natürlich eine unkonventionelle Herangehensweise voraus, die nicht immer strengerem mathematischen und physikalischen Maßstäben entspricht. Man kann dann aber trotz oder gar deswegen die Herleitungen, Formelbildungen und Argumente ganz gut verstehen kann.

Hier und da werde ich mich verhaspelt haben. Für Fehler bzw. Fehlinterpretationen und falls mal ein spekulativer Gaul mit mir durchgegangen ist, entschuldige ich mich im Voraus. Zu meiner Verteidigung möchte ich diesbezüglich hervorbringen, dass ich niemanden in meinem durchaus akademisch gebildeten Umfeld gefunden habe, der Willens oder in der Lage war, dieses Skript vor Veröffentlichung wissenschaftlich auf Konsistenz zu durchforsten. Das verstehe und respektiere ich. Fast neunzig Seiten mit jeder Menge Formeln, dafür seine kostbare private Zeit zu opfern, das kann man nicht erwarten. Und nicht jeder verfolgt dieses Thema als Hobby so verbissen wie ich. Dass sich dies nach einer Veröffentlichung entsprechend ändern kann, zeigt uns die Erfahrung und ist zutiefst menschlich. Natürlich freue ich mich auf jedwede sachliche Reaktion, egal welcher Art.



Bis auf die Stellen, die ich mit Quellenangaben versehen habe, habe ich dieses Skript auch nicht durch künstliche Intelligenz wie z.B. ChatGPT weder schreiben, auch nicht nur teilweise, noch Korrektur lesen lassen. Nicht in wissenschaftlichen, mathematischen oder physikalischen Belangen noch in Hinsicht auf Orthographie und Grammatik, Didaktik oder pädagogischer Herangehensweise.

Ich hoffe, dass ich trotzdem über die fast 90 Seiten Ihr geneigtes Interesse hochhalten kann. Unkonventionell ist hier das Stichwort. Es soll Sie motivieren, auch an etwas schwierigeren Stellen nicht die Flinte ins Korn zu werfen.

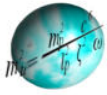
Mit den sinusartigen Reihen des Herrn Baron Jean-Baptiste Joseph Fourier, dem weltbekannten französischen Mathematiker und Physiker (1768-1830) beginnen wir: Los geht's!

1. Ausgangsbedingungen und Definition sinusartiger Funktionen

Alle mit konventionell festgelegten Dimensionen versehenen Konstanten wie die Lichtgeschwindigkeit c , das Planck'sche Wirkungsquantum h , die Boltzmannkonstante k_B , andere diesbezügliche Konstanten und festgehaltene Größen, wie zum Beispiel die Temperatur, gehen generell mit dem dimensionslosen Wert 1 ein. Ausgenommen davon werden allerdings die Passagen, in welchen quantenmechanische Wellengleichungen hergeleitet werden.

Die Weltlinien von Quanten rotieren mit konstantem Abstand um ihre eigenen Ursprungsachsen in ihren unendlich vielen Inertialsystemen I_j (mit j als Element der natürlichen Zahlen) immer mit der Lichtgeschwindigkeit c , wie für Minkowski-Räume gemäß der Speziellen Relativitätstheorie üblich. Die Rotationsgeschwindigkeit des Raum-Zeit-Kontinuums aller unendlichen Inertialsysteme I_j ist von einem äußeren Inertialsystem I_m (mit m als Element der natürlichen Zahlen) betrachtet ebenfalls immer gleich der Lichtgeschwindigkeit. Deshalb laufen die Winkelgeschwindigkeiten k bzw. Frequenzen ϑ unserer inertialen Quanten über 1 bis Unendlich sowie ihre Radian bzw. Abstände oder Amplituden bezüglich ihrer Ursprungszeitachse von k^{-1} bis Limes 0.

Für äußere Beobachter (bezüglich zu den jeweiligen rotierenden Inertialen I_j) in den ebenfalls unendlich vielen Inertialsystemen I_m bedeutet dies hinsichtlich zu seinen ruhenden inertialen



Raumachsen eine asymmetrische (Punktspiegelung) sinusartiger sowie symmetrische (Achsen-spiegelung) cosinusartiger Amplituden-Zeit- 2π -periodischer Kurven mit Anstiegen gleich 1 in den Null- bzw. Knotenpunkte, um der jederzeit konstanten Rotationsgeschwindigkeit c in den Einzelinertialsystemen I_j zu genügen.

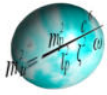
Die Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung soll durch vorerst stark vereinfachte Symmetriebetrachtungen derart gewährleistet werden, dass sich alle sinus- und cosinusgeführten Quanten periodisch in bestimmten Knotenpunkten, einschließlich der für äußere Beobachter auftretenden unendlich hohen Potentialwände, streng schneiden und dort gemeinsam die Amplitudenhöhe gleich Null haben. Die Erhaltungssätze unter dem Aspekt der Lorentz-Invarianz hinsichtlich von Beobachtern der Inertialsysteme I_j und I_m in der Minkowski-Raumzeit sollen dann im späteren Verlaufe des Skriptes mathematisch genauer betrachtet werden.

Unendlich viele sinusartige Cosinus- und Sinuskurven S_n als dann stehende Wellen werden im Definitionsbereich $-\pi/2$ und $+\pi/2$ (und wie noch zu sehen auch darüber hinaus) mit unendlich hohen Potentialwänden in die Potentialintervalle hineinkonstruiert und einer Fourier-Entwicklung unterzogen. Diese so definierten Energiepotentiale können entweder als maximal reflektierende Hohlkugeln (Schwarzer Körper), aber auch als ein innerhalb eines räumlich begrenzten Volumens (Schwarzes Loch, die Zeit kurz nach dem Urknall) hochenergetisches Quantengebilde im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet werden. Damit die verschiedenartigen symmetrischen und asymmetrischen und damit auch Anteile konstruktiver und destruktiver Interferenz (Resonanzen stehender Wellen) korrekt gewichtet sind, werden die Fourier-Reihen erst nach den Linearkombinationen quadriert und Teilintergrale hinsichtlich quantenphysikalischer Aussagen (z.B. Wahrscheinlichkeitsdichten und Skalarprodukte) ausgewertet und interpretiert.

Damit soll der Weg für streng relativistische und Lorentz-invariante Bedingungen bereitet werden.

Dies bedeutet nun für die Cosinusfunktionen

$$(1.01) \quad S_{\cos} \left(\begin{matrix} +\pi/2 \\ -\pi/2 \end{matrix} \right) = \frac{\cos(n \cdot t)}{n} \quad n \in \mathbb{N}$$



$$(1.02) \quad S'_{\cos} = (\pm 1) = -\sin[n \cdot (-\pi/2)] \quad n = 1, 3, 5, 7 \dots$$

$$(1.03) \quad S'_{\cos} = (\mp 1) = -\sin[n \cdot (+\pi/2)] \quad n = 1, 3, 5, 7 \dots$$

$$(1.04) \quad S_{\cos} = (0) = \frac{\cos[n \cdot (\pm \pi/2)]}{n} \quad n = 1, 3, 5, 7 \dots$$

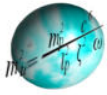
sowie für die Sinusfunktionen:

$$(1.05) \quad S_{\sin} \left(\begin{matrix} +\pi/2 \\ -\pi/2 \end{matrix} \right) = \frac{\sin(n \cdot t)}{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(1.06) \quad S'_{\sin} = (\mp 1) = \cos[n \cdot (\mp \pi/2)] \quad n = 2, 4, 6, 8 \dots$$

$$(1.07) \quad S_{\sin} = (0) = \frac{\sin[n \cdot (\pm \pi/2)]}{n} \quad n = 2, 4, 6, 8 \dots$$

Damit haben alle Cosinusfunktionen der Klasse (1.01) mit ungeraden n und alle Sinusfunktionen der Klasse (1.05) mit geraden n an den Potentialgrenzen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ sowohl den Anstiegsbetrag 1 (Lichtgeschwindigkeit c) als auch die Amplitudenhöhen 0 an den Potentialwänden (Auslenkung und damit Aufenthaltswahrscheinlichkeit Null). Auch geht aus den alternierenden Vorzeichen der Anstiege die Achsensymmetrie der Cosinusfunktion, die Punktsymmetrie der Sinusfunktion und auch gegenläufigen Geschwindigkeiten (Phasen), also quasi die Zeit-Symmetrie, und damit subtilerweise auch die Ladungserhaltung, ein. So haben wir den dritten Erhaltungssatz neben dem des Impulses und dem der Energie und irgendwie auch die CPT-Symmetrie durch Vertauschung von Ladung C , der Parität P durch Spiegelung und Zeitumkehr im Auge, was vorerst rein intuitiv eingeführt ist und später bei der Heranziehung von Matrizen für die Wellengleichungen einen exakteren mathematischen Sinn ergeben wird. Die Frage nach allen anderen möglichen Klassen von Cosinus- und Sinusreihen als die in diesem

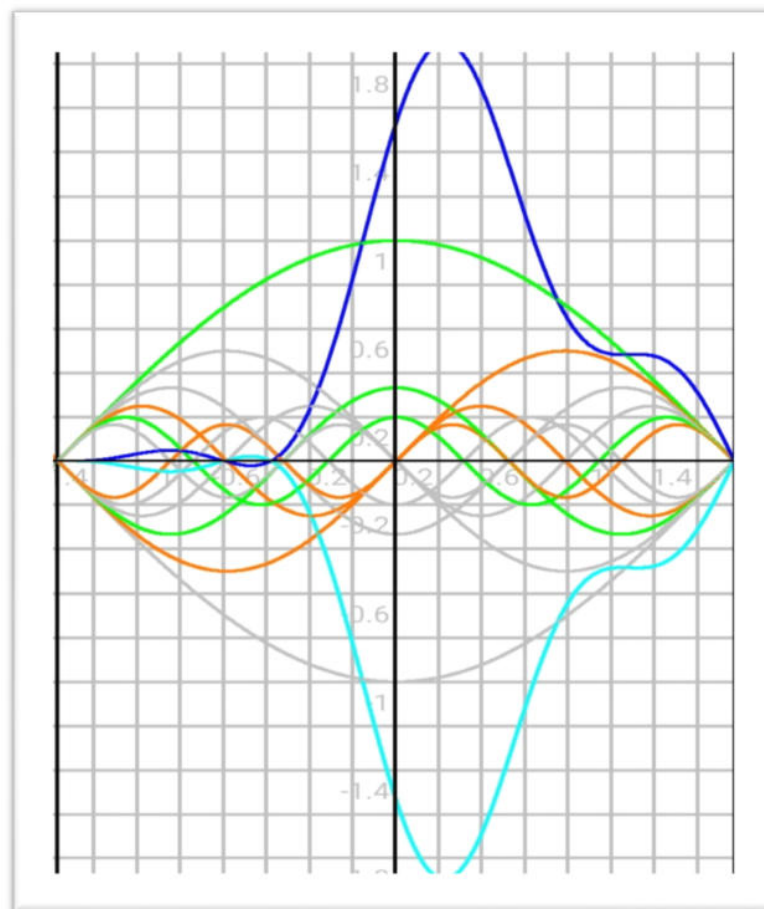


Skript primär analysierten Fourier-Reihen der Klassen (1.01) und (1.05) werden hier nicht diskutiert, da diese in der Regel keine Bezüge zu Fermionen und Bosonen haben werden und somit für allgemeingültige Wellengleichungen keinen praktischen Sinn ergeben.

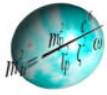
Gemäß oben aufgeführten Ausgangsbedingungen werden zuerst die obigen Cosinus- und Sinusfunktionen S_n im Intervall π zwischen den unendlich hohen Potentialwänden $-\pi/2$ und $+\pi/2$ hereinkonstruiert, von welchen diese sich hundertprozentig mit einem Phasenversatz von π hin und her spiegeln. Diese werden dann kombiniert und man erhält einen resultierenden Kurvenverlauf. Es wird also eine Fourier-Synthese unternommen.

Im unteren Bild ist dies für drei Cosinus- (grün) und drei Sinuskurven (orange) sowie deren gespiegelte Kurven (hellgrau) mit k von 1 bis 6 und der dazugehörigen Kombination (blau) und deren Spiegelung (cyan) realisiert worden. Dies wird im folgenden Bild grafisch verdeutlicht.

Bild 1/1: Kombination $k=6$ von Cosinus- und Sinusfunktionen



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6



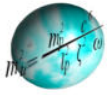
Es entstehen somit gesehen geschlossene Kurven im Intervall von 2π . Damit könnte die komplexe (Gauß'sche) Zahlenebene ins Spiel kommen. Dazu später. Vorerst betrachten wir also weiterhin nur die reellen Funktionen $S_{\cos}$ und $S_{\sin}$.

$$(1.08) \quad S_{\cos} = \frac{\cos[(2k-1) \cdot t]}{2k-1} \quad S_{\sin} = \frac{\sin[(2kt)]}{2k} \quad k \in \mathbb{N}$$

Die **allgemeinere Form** der Gleichungen (1.08) ist allerdings:

$$(1.09) \quad S(t) = A \cdot \begin{bmatrix} \cos(B \cdot t) \\ \sin(B \cdot t) \end{bmatrix} \quad A = \frac{1}{n} \quad B = n \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese Form garantiert die postulierten konstanten Geschwindigkeiten in den jeweiligen rotierenden Inertialsystemen I_n , da nun alle Funktionen $S(t)_n$ sowohl an den Potentialgrenzen ($S = 0$) als auch in deren Nullpunkten dazwischen Anstiege von 1 aufweisen. Da t laut obigen Ausgangsbedingungen der konkrete Zeitpunkt innerhalb des universellen Zeittaktes zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ für alle $S(t)_n$ ist, sonst macht das Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit keinen Sinn, muss B_n der physikalischen Form nach einer Frequenz ϑ_n entsprechen, damit $B_n \cdot t$ wieder dimensionslos wird. A ist mathematisch die Amplitude der Funktionsform (1.09). Setzen wir hier wieder unsere definierten Ausgangsbedingungen an, so sind die Beträge von A_n die jeweiligen räumlichen maximalen positiven und negativen Ausschläge x_n der Funktionen S_n innerhalb $+\pi/2$ und $-\pi/2$ sowie die Beträge der jeweiligen maximalen positiven und negativen räumlichen Ausschläge x_n der Funktionen S_n , weil mit π -Phase gespiegelt, zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$. Weil somit alle S_n für sich betrachtet 2π -geschlossene Funktionen (Kreise) ihres jeweilig dazugehörenden Einheitskreises B_n (Frequenzen ϑ_n) sind, kann man diese räumlichen Ausschläge, auch wenn man sie physikalisch interpretiert, dimensionslos lassen. Ebenso drängt sich hier einem wieder die komplexe Zahlenebene aus Einheitskreisen (Beträge der maximalen Auslenkungen x_n entsprechend der Amplituden A_n), positiv komplexe Zahlenebenen $a_n + ib_n$ (definierte Kreisfunktionen im Bereich $+\Delta\pi$), negativ komplexe Zahlenebenen $a_n - ib_n$ (definierte Kreisfunktionen im Bereich $-\Delta\pi$) und damit untrennbar verbunden die Phasenwinkel φ_n (proportional der Winkelgeschwindigkeiten ω_n) auf. Da jedoch die Gesamtergebnisse einer Betrachtung komplexwertiger Eingaben hinsichtlich unserer Ausgangsbedingungen



im definierten Potential zurücktransformiert immer reell bleiben und experimentelle Messungen und Nachweise ebenfalls immer reell sind, verschieben wir die Betrachtungen für den gesamten komplexen Zahlenbereich, wie gesagt, auf weiter hinten im Skript.

2. Kombination linearer Gleichungen

Die eingangs charakterisierten Cosinus- und Sinusfunktionen werden nun als unendliche Fourier-Reihen kombiniert, indem man folgende Summation P_∞ bildet:

$$(2.01) \quad P_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos[(2k-1) \cdot t]}{2k-1} + \frac{\sin[2k \cdot t]}{2k} \right] \quad k \in \mathbb{N}$$

Für den Definitionsbereich von $-\pi$ bis 0 entspricht dies folgender Teilfunktion $F(t_-)$:

$$(2.02) \quad F(t_-) = - \left[\frac{\ln[\cot((t+\pi)/2)]}{2} + \frac{\pi+2t}{4} \right] \quad (-\pi < t < 0) \quad 1)$$

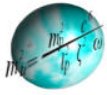
Für den Definitionsbereich von 0 bis $+\pi$ entspricht es dieser Teilfunktion $F(t_+)$:

$$(2.03) \quad F(t_+) = + \left[\frac{\ln[\cot(t/2)]}{2} + \frac{\pi-2t}{4} \right] \quad (0 < t < +\pi) \quad 1)$$

¹⁾ mit Hilfe von ChatGPT

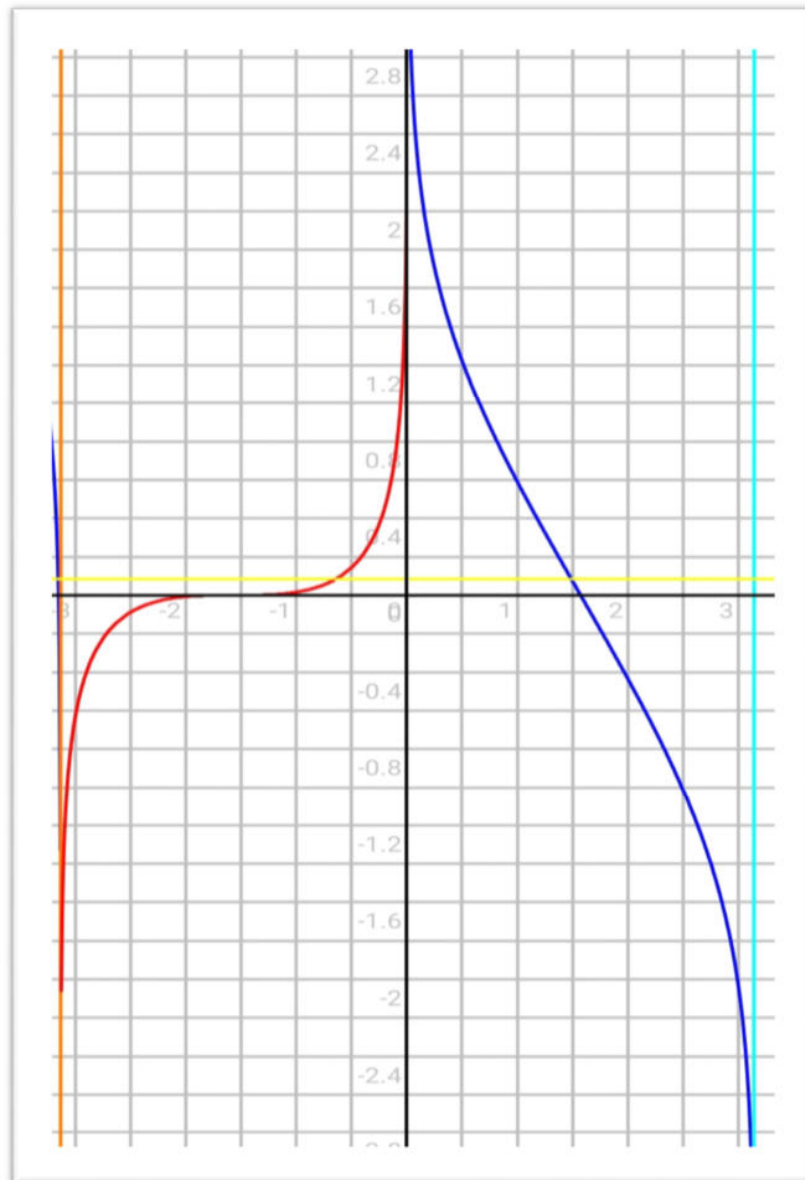
Die Teilfunktion (2.02) hat $-\pi$ als negative Polstelle (orange) und divergiert von $-\pi/2$ kommend gegen $-\infty$, 0 als positive Polstelle (schwarz) und divergiert gegen $+\infty$ sowie eine Nullstelle in $-\pi/2$. Diese Funktion ist im folgenden Bild rot eingezeichnet.

Die Teilfunktion (2.03) hat 0 als positive Polstelle und divergiert von $+\pi/2$ kommend gegen $+\infty$, $+\pi$ als negative Polstelle (cyan) und divergiert gegen $-\infty$ sowie eine Nullstelle in $+\pi/2$. Diese Funktion ist im folgenden Bild blau eingezeichnet.



Die beiden Funktionen unterscheiden sich diametral im Anstiegsverhalten. Die gelbe Linie ist der Wert des Radikals der Feinstrukturkonstante α .

Bild 2/1: Grafische Darstellung der Teilfunktionen (2.02) und (2.03)



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Das nächste Bild zeigt die Summation P (blaue Kurven) bis zu $k = 85$ im Definitionsbereich von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ (schwarze Linien) als Annäherungen an die Teilfunktionen (2.02) und (2.03), rot dargestellt. Hier ist die orangene Linie der Betrag des Radikals der Feinstrukturkonstante α .

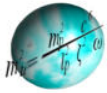
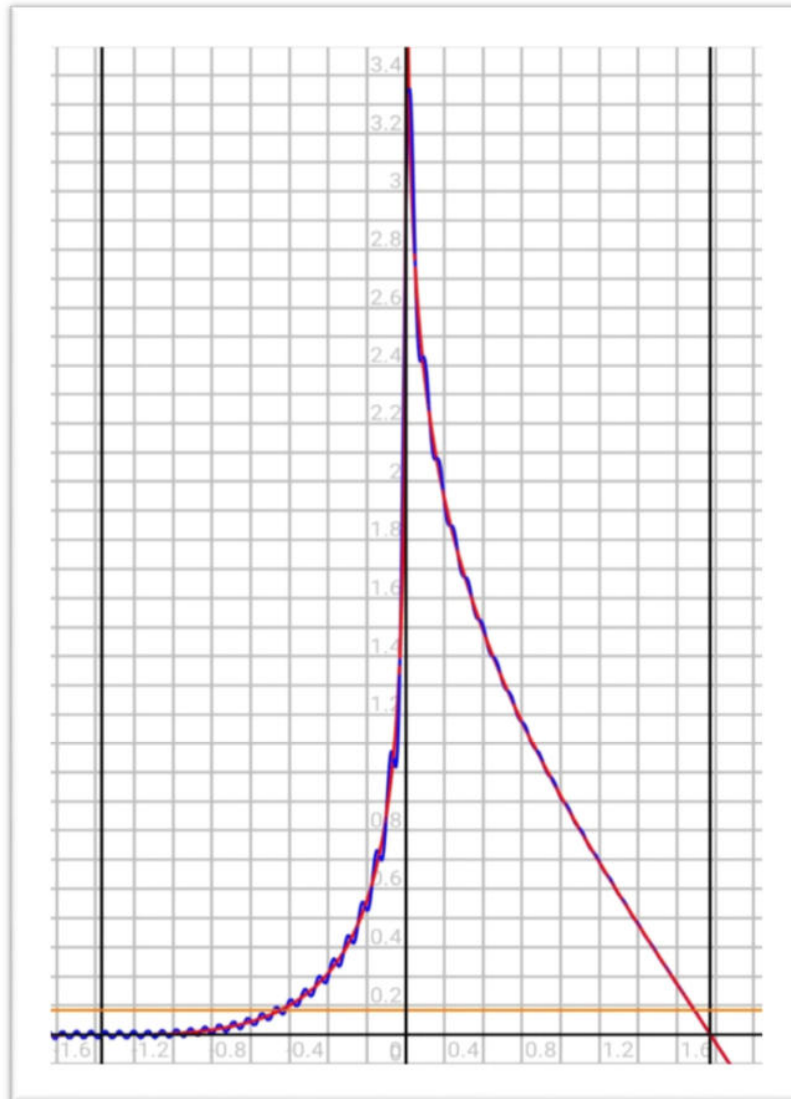


Bild 2/2: Annäherung an (2.02) und (2.03) durch Summation P_{85} (2.01)



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Die Annäherung im unteren Teil in der Umgebung um $-\pi/2$ bis in die negative Umgebung von 0 ist sehr viel „unruhiger“ als im Definitionsbereich von 0 bis zur Umgebung von $\pi/2$, wo man so gut wie gar keine Unterschiede mehr zwischen den Annäherungs- und Funktionswerten ausmachen kann.

Bild Nr. 2/3 zeigt einen in die P_{85} -Achse stark hereingezoomten Ausschnitt, welcher diese „Unruhe“ in der weiteren Umgebung besonders innerhalb des $P = \pm\alpha^{0,5}$ Feinstrukturbereiches (orange Linien) deutlich machen soll.

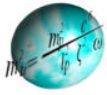
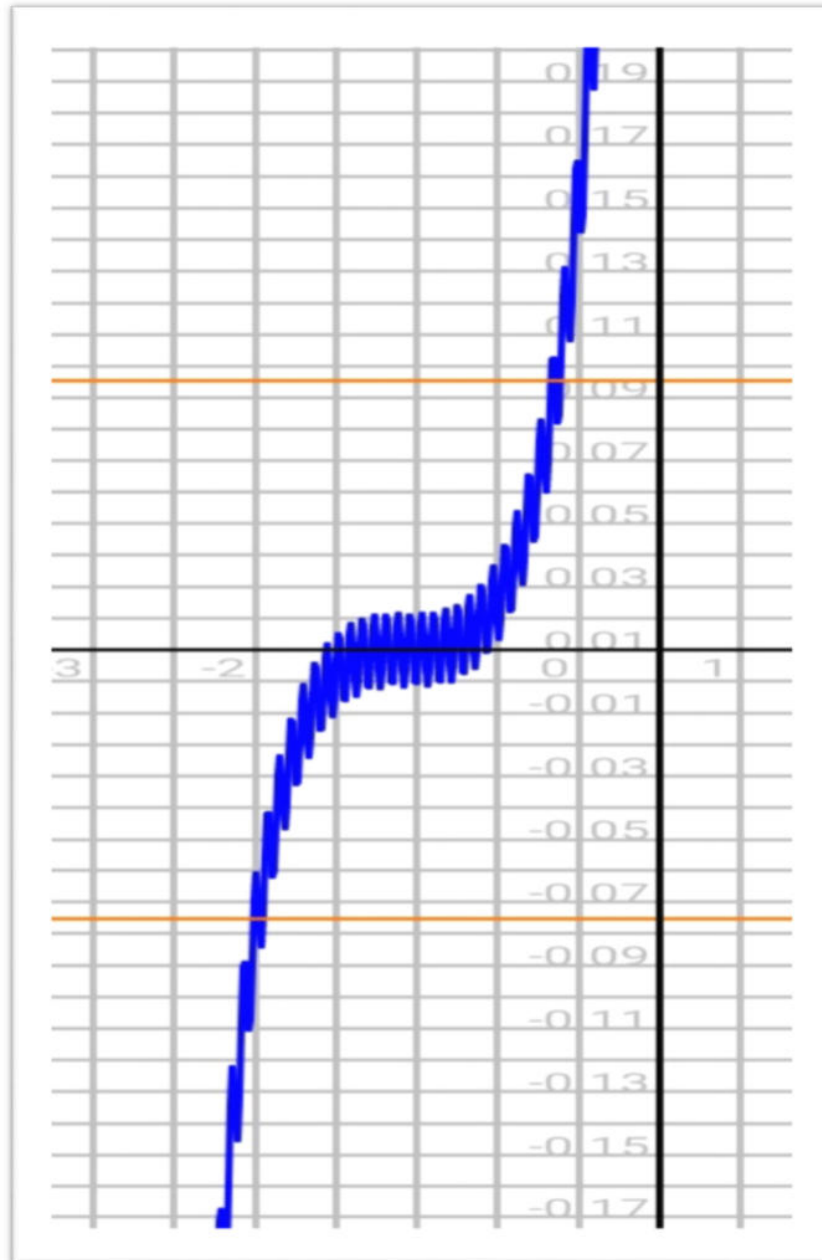
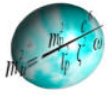


Bild 2/3: Gezoomter Ausschnitt der Kurve P_{85} im Bereich $-\pi/2$ und $\pm\alpha^{0.5}$



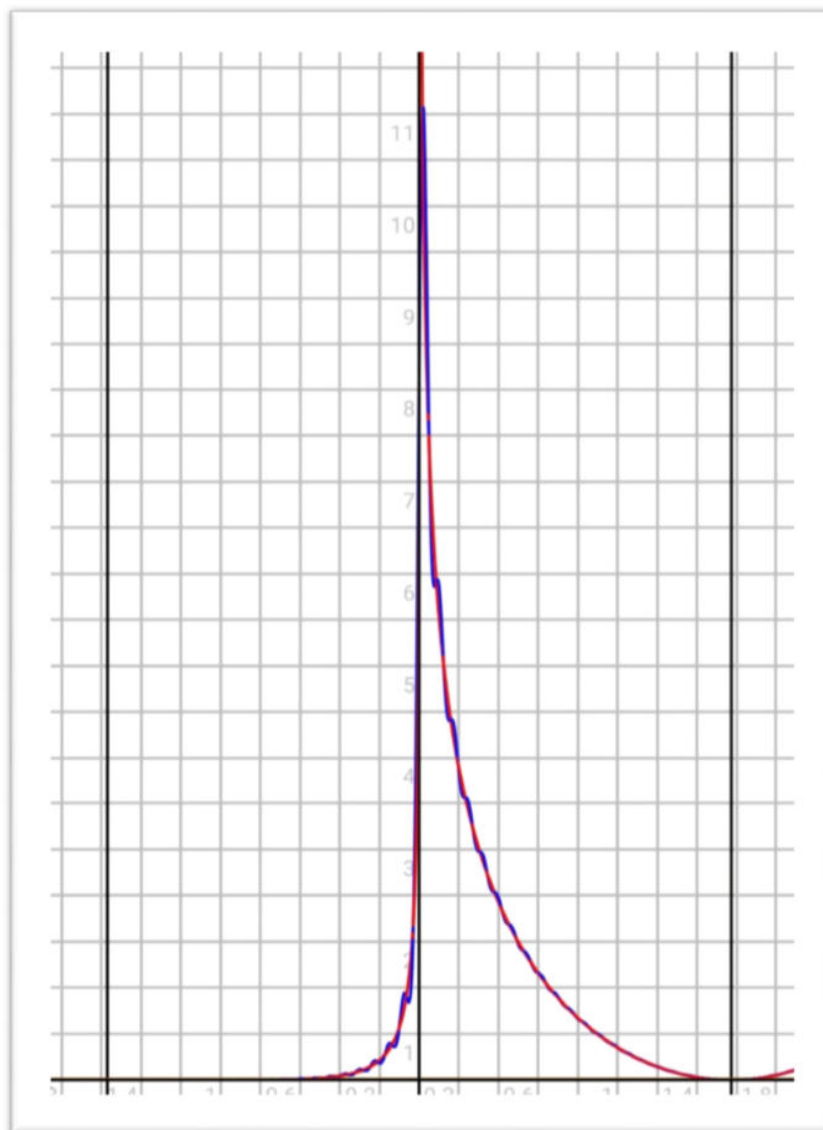
Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6



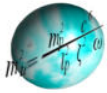
3. Quadrierung und Integration

Zunächst wird die gesamte Annäherung P_{85} gemäß Gleichung (2.01) quadriert, grafisch aufgetragen und mit den jeweiligen Quadraten der Teilfunktionen $F(t_-)$ nach (2.02) und $F(t_+)$ nach (2.03) innerhalb des Definitionsbereiches, also des zu betrachtenden Potentials von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$, verglichen.

Bild 3/1: Vergleiche der Annäherung $(P_{85})^2$ mit $(F(t_-))^2$ und $(F(t_+))^2$



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6



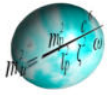
Und auch hier kann man wie bei den nicht quadrierten Funktionen die vermeintlich unsymmetrisch zueinander verlaufenden Grafen $F^2(t_-)$ und $F^2(t_+)$ des linken und rechten Halbpotentials sehen.

Auch sind die Annäherungen P^2_{85} im Bereich $-\pi/2$ bis in die negative Umgebung der Amplitudenachse sehr „unruhig“ im Vergleich zum Funktionsverlauf im Bereich des positiven Halbpotentials (blau gezeichnete Grafen). Im unteren Bild ist der in den untersten Teil des negativen Halbpotential hereingezoomte Verlauf der P^2_{85} -Verteilung (blau) zu sehen. Die orangene Linie stellt den Wert der Feinstrukturkonstante α dar.

Bild 3/2: Gezoomter Ausschnitt der Kurve P^2_{85} im Bereich $-\pi/2$ und α



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6



Trotzdem kann man auch hier guten Gewissens feststellen, dass die Werte der Einzelwahrscheinlichkeiten $(F(t_-))^2 = A$ und $(F(t_+))^2 = B$ mit den Werten der Gesamtwahrscheinlichkeitskurve $(P_{85})^2 = C_{85}$ in erster Näherung wie auch bei den nichtquadrierten Funktionen gut übereinstimmt. Die so erhaltene Wahrscheinlichkeitsverteilung sollte nach einer Integration nach dt konvergieren, auch, um ordnungsgemäß normieren zu können. Das Gesamtintegral $I_{C\infty}$ kann also durch Addition der Integrale I_A und I_B berechnet werden.

$$(3.01) \quad I_C = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos[(2k-1) \cdot t]}{2k-1} + \frac{\sin[2k \cdot t]}{2k} \right] \right]^2 dt \quad k \in \mathbb{N}$$

$$(3.02) \quad I_A = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\ln[\cot(t/2)]}{2} - \frac{\pi - 2t}{4} \right]^2 dt \cong 0,2401284047478484...^{1)}$$

$$(3.03) \quad I_B = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\ln[\cot(t/2)]}{2} + \frac{\pi - 2t}{4} \right]^2 dt \cong 2,343727985277136...^{1)}$$

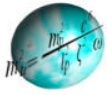
$$(3.04) \quad I_C = I_A + I_B \cong 2,583856390025...$$

$$(3.05) \quad I_C = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P_{\infty}^2 dt \cong \frac{\pi^3}{12} \quad (?!)$$

¹⁾ rein numerische Abschätzung durch „<https://www.integralrechner.de>“. Eine Stammfunktion konnte nicht gefunden werden.

Der abweichende Funktionsterm und die veränderten Integrationsgrenzen in (3.02) sind nur einer Vereinfachung von (2.02) für die numerische Berechnung des Integrals geschuldet. Beide Änderungen nivellieren sich nach der Quadrierung, es macht also keinen Unterschied für den Wert des Integrals I_A , egal in welchem Halbintervall man es berechnet.

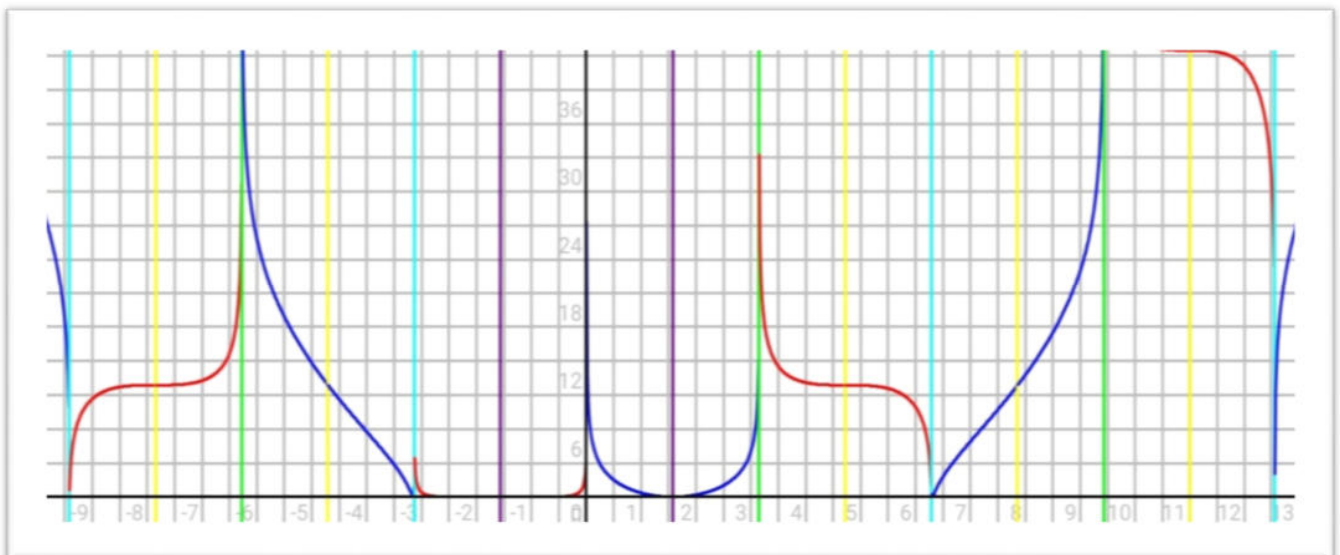
Verfolgen wir die numerisch ermittelten Ergebnisse obiger vier Gleichungen, so ist sehr stark anzunehmen, dass das Gesamtintegral I_C gegen $\pi^3/12$ konvergiert (mit der π -gespiegelten Komponente zu $\pi^3/6$). Falls es tatsächlich so ist, entspricht $P_{\infty}^2(t)$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche über unsere definierten Potentialgrenzen integriert einer konkreten Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(t)$ entsprechen würde.



4. Zusammenhänge mit anderen Teilfunktionen

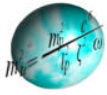
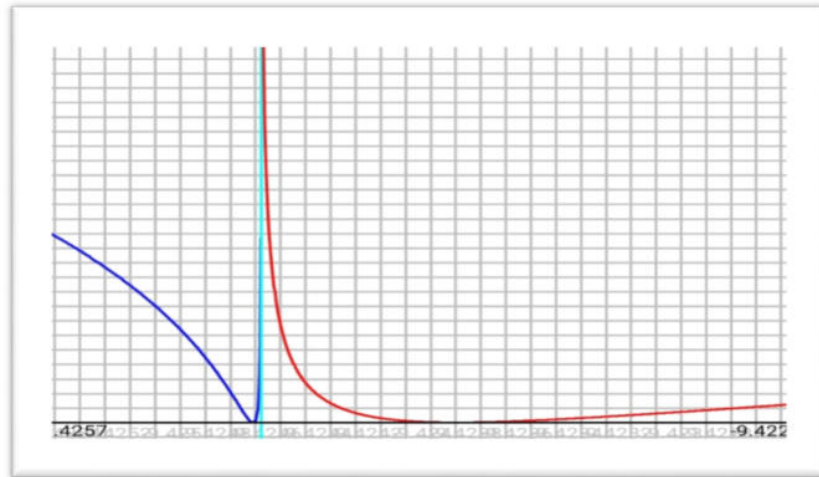
Durchaus interessante Zusammenhänge ergeben sich aus den unendlich auftretenden Funktionen bzw. den Wahrscheinlichkeitsverteilungen F^2_{t-} und F^2_{t+} als quadrierte Klammerausdrücke der Teilintegrale I_A (3.02), rot gezeichnet, und I_B (3.03), blau gezeichnet, auch außerhalb des für uns betrachteten Potentialintervalls von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$. In einem Bereich von -3π bis $+4\pi$ soll dies in folgendem Bild dargestellt werden.

Bild 4/1: F^2_{t-} (rot) und F^2_{t+} (blau) Funktionen und deren Polstellen (0, cyan und grün)



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

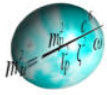
Auf der negativen Seite existieren Polstellen $-\pi n$: An den geraden n -Polstellen divergieren beide Grafen links und rechts gegen unendlich. In der näheren Umgebung der ungeraden n -Polstellen links und rechts haben beide Grafen Nullberührungspunkte, die dann beide an der Polstelle gegen unendlich divergieren. Die Differenzen zwischen Polstellen und Nullberührungspunkte konvergieren mit zunehmendem n gegen Null. Ein vergrößerter linker Ausschnitt des obigen Bildes soll dies verdeutlichen.

Bild 4/2: Nullberührungsstellen an der Polstelle -3π von F_{t-}^2 (rot) und F_{t+}^2 (blau) Teilfunktionen

Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Auf der positiven Seite existieren Polstellen $+n\pi$: An den ungeraden n -Polstellen divergieren beide Grafen links und rechts gegen unendlich. In der näheren Umgebung der geraden n -Polstellen links und rechts haben beide Grafen Nullberührungspunkte, die dann beide an der Polstelle gegen unendlich divergieren. Die Differenzen zwischen Polstellen und Nullberührungspunkte konvergieren mit zunehmendem n gegen Null. Dies ist adäquat dem oberen Bild.

Auch hier ist wieder die vermeintlich inertielle Achsenasymmetrie charakteristisch, welche nur aufgehoben werden könnte, wenn man vor dem Quadrieren unter der Konsequenz einer Mischung der Grafen innerhalb des Definitionsbereiches von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$, die F_{t+} -Grafen um $\pi/2$ nach links und die F_{t-} -Grafen um $\pi/2$ nach rechts verschieben würde. Damit wäre sowohl ein Zusammenfallen der Potentialgrenzen in den Ursprung 0 als auch eine „Entwirrung“ der ehemaligen Teilgrafien durch destruktive Interferenz verbunden. Das Ergebnis dieser „Mischung“ bzw. „Symmetrisierung“ durch gegenläufige $\pi/2$ -Verschiebungen (Drehungen gegen und in Uhrzeigerrichtung) deutet auch hier ganz stark darauf hin, dass komplexe Anteile eine Rolle spielen, auf welche wir, wie gesagt, noch zurückkommen werden.



$$(4.01) \quad F(t_-) = - \left[\frac{\ln[\cot((t + \pi)/2)]}{2} + \frac{\pi + 2t}{4} \right] \xrightarrow{t-\pi/2} - \left[\frac{\ln[\cot((t + \pi/2)/2)]}{2} + \frac{\pi + 2(t - \pi/2)}{4} \right]$$

$$(4.02) \quad F(t_+) = + \left[\frac{\ln[\cot(t/2)]}{2} + \frac{\pi - 2t}{4} \right] \xrightarrow{t+\pi/2} + \left[\frac{\ln[\cot((t + \pi/2)/2)]}{2} + \frac{\pi - 2(t + \pi/2)}{4} \right]$$

$$(4.03) \quad F(t_-) \xrightarrow{t-\pi/2} = - \left[\frac{\ln[\cot((t + \pi/2)/2)]}{2} + \frac{t}{2} \right] = -[\dots] - \frac{1}{2} \quad \overline{SP}^n_- = -\frac{1}{2}$$

$$(4.04) \quad F(t_+) \xrightarrow{t+\pi/2} = + \left[\frac{\ln[\cot((t + \pi/2)/2)]}{2} - \frac{t}{2} \right] = +[\dots] - \frac{1}{2} \quad \overline{SP}^n_+ = -\frac{1}{2}$$

Der kürzeste Verlauf durch die Schnittpunkte der zwei Teilfunktionen ist eine Gerade t (im folgenden Bild die cyane Linie) mit dem Anstieg von $-1/2$, der linearen Abhängigkeit des Weges (Auslenkung) von der Zeitperiode.

$$(4.05) \quad \left[F(t_+) \xrightarrow{t+\pi/2} + F(t_-) \xrightarrow{t-\pi/2} \right] = -t$$

Die Addition beider Teilfunktionen ergibt die „entwirrte“ Funktion $-t$, was eine Gerade mit einem Anstieg von -1 bedeutet (im folgenden Bild die grüne Linie).

Wenn man die, mit π -Versatz rückgespiegelten, Funktionen der anderen Halbebene von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ mit betrachten würde, käme man dann auch auf die entsprechenden positiven Anstiege.

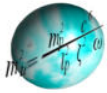
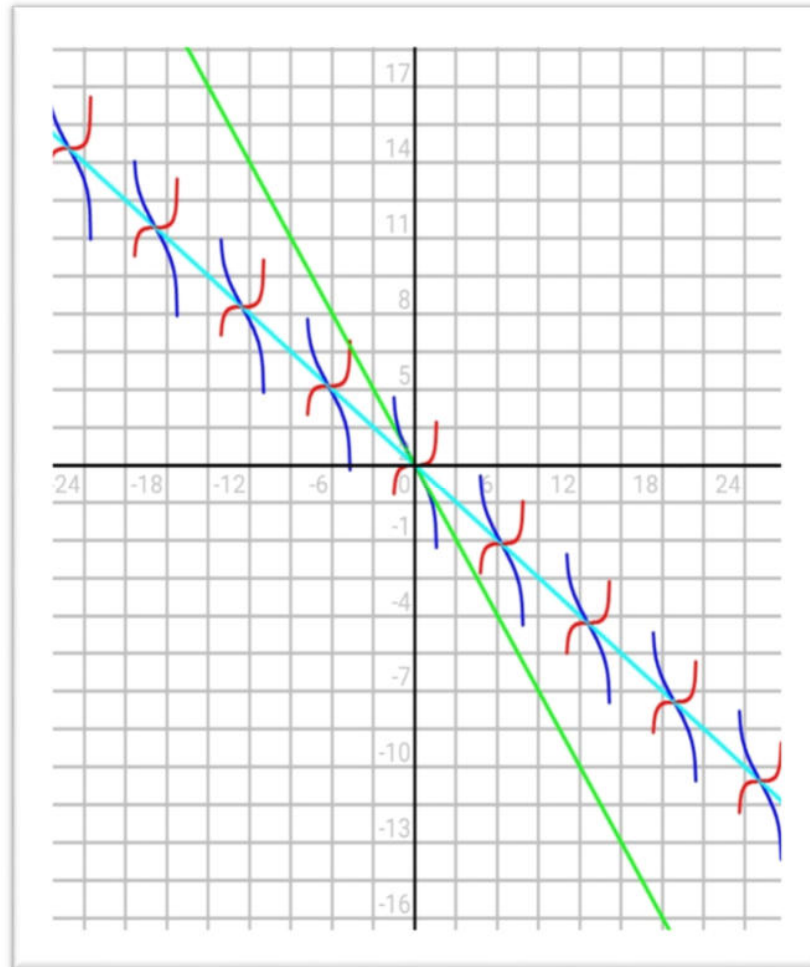
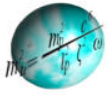


Bild 4/3: Gegenseitige $\pi/2$ -Verschiebung von F_{t-} (rot) und F_{t+} (blau) Teilfunktionen und deren „Entwerrung“ (grün)



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Durch diese Manipulation bzw. das in Betracht ziehen komplexwertiger Drehungen entfällt somit nach jedem Winkel $\pi/2$ das Potential für Beobachter aus den Inertialsystemen II_m heraus. Nach jeder Drehung um einen Winkel um $\pi/2$, und was völlig identisch ist, auch jeder Drehung dieses Beobachters in Bezug zum jeweiligen Inertialsystem I_j , erfolgt also je nach Beobachtungsposition dieser beschriebene Wechsel.



5. Fourier-Analysen und Transformationen in den komplexen Zahlenbereich

Für die Kombination von 85 Stück unserer im Kapitel 1. definierten sinusartigen Funktionen haben wir empirisch folgende Teilgleichungen gefunden, welche im Funktionsbereich von $-\pi$ bis 0 und 0 bis $+\pi$ hervorragend mit dem Kombinationsgraphen übereinstimmen.

$$(5.01) \quad f(t_-) = - \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t+\pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi+2t}{4} \right) \right] \quad \{t : -\pi > 0\}$$

$$(5.02) \quad f(t_+) = + \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi-2t}{4} \right) \right] \quad \{t : 0 < +\pi\}$$

Alle Grafen divergieren bei $t = (2 \cdot \ln l - 1) \cdot \pi$ gegen $-\infty$, bei $t = (2 \cdot \ln l) \cdot \pi$ gegen $+\infty$. Diese t sind also allesamt Polstellen. Die Wendepunkte aller Grafen (im Definitionsbereich gleichbedeutend mit reellen Nullstellen) haben die Funktionswerte $t = (2 \cdot \ln l - 1) \cdot (\pi/2)$, wobei hier n aus dem Bereich der ganzen Zahlen stammt.

Die Linearkombination (blau) wiederholt sich außerhalb des Definitionsbereiches nach jeder 2π -Periode auf der t -Achse in negativer und positiver Richtung immer wieder.

Die in (5.01) und (5.02) aufgezeigten Teilgleichungen (rot) dagegen weichen außerhalb des Funktionsbereiches in dem Sinne von der Kombination ab, dass sie sich nach jeder n -ten 2π -Periode auf der t -Achse mit jeweils einer π -Periode im negativen t -Bereich nach oben und im positiven t -Bereich nach unten in Richtung der vertikalen Achse verschieben. Zur näheren Anschauung dazu das nächste Bild:

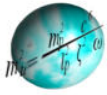
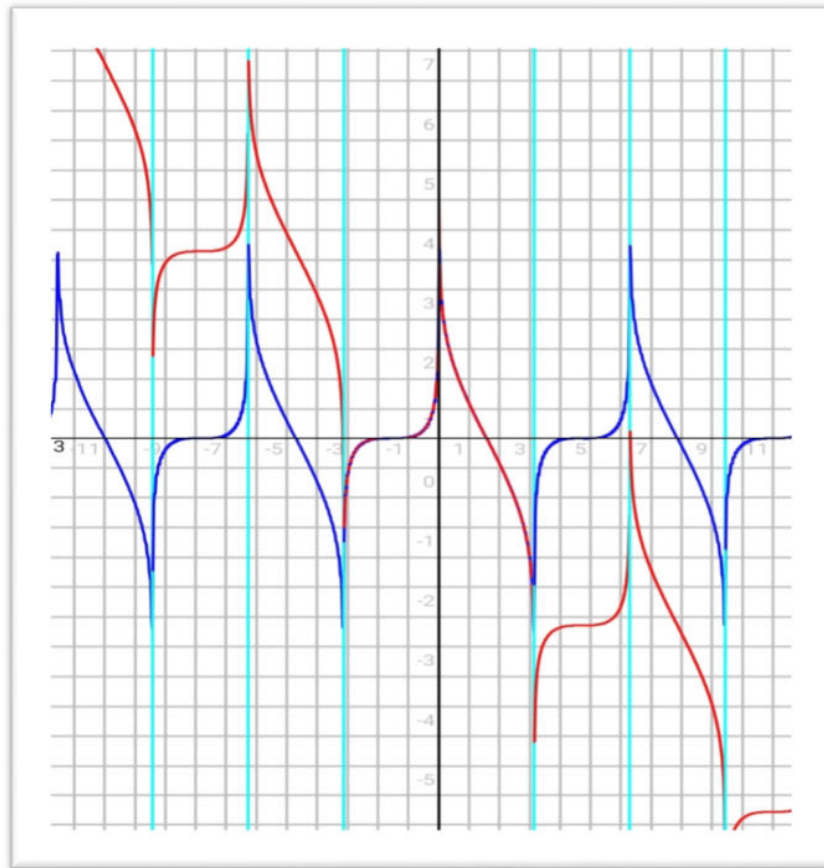


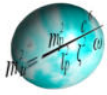
Bild 5/1: Teilfunktionen (5.01) und (5.02) und die dazugehörige sinusartige Kombination (blau)



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Dies deckt sich mit den Aussagen in Kapitel 4. über den negativen Anstieg $\frac{1}{2}$, wenn man die Schnittpunkte der gemischten roten Teilgrafiken verbindet. Und dies trifft auf jede 2π -Periode zu. Also auch auf Perioden unserer in Kapitel 1. festgelegten Potentialbereiche von $-\pi/2$ bis $+3/2\pi$, wo das Periodenstück $+\pi/2$ bis $+3/2\pi$ der rückgespiegelte π -verschobene Anteil ist. Jetzt aber macht diese Erkenntnis auch einen Sinn. Wenn auf der t-Achse in einer Zeiteinheit eine Periode und damit eine Skala von 2π durchschritten und während genau dieser Zeitspanne auf der vertikalen Achse nur eine Skala von π zurückgelegt wird, deutet dies aus den in Kapitel 1 dargelegten Symmetriegründen darauf hin: Ein adäquater Anfangszustand ist erst nach einer 4π -Periode vollständig wiederhergestellt. Und ist dies nicht das Charakteristikum des Verhaltens eines Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchens?

Weitere Verhältnisse von Anstiegen ergeben sich aus den Linearkombinationen der Teilfunktionen mit sich selbst:



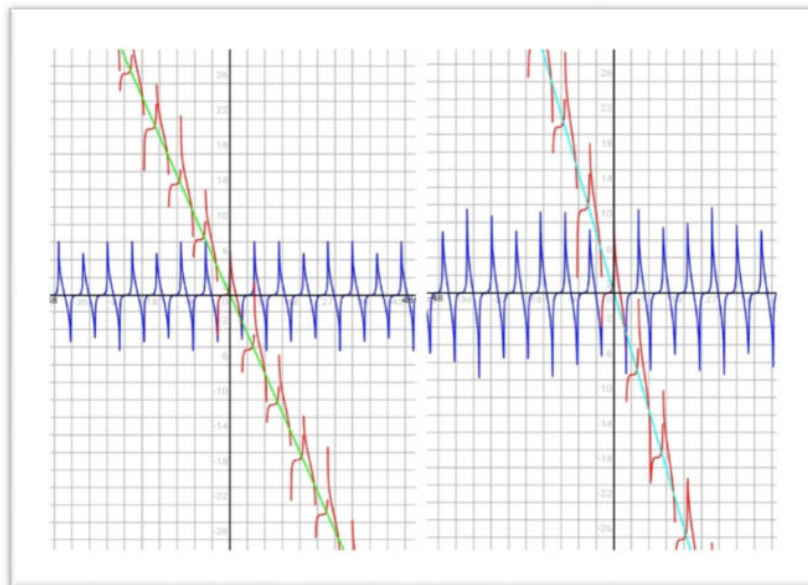
$$(5.03) \quad f(t_-) = n_k \cdot \left[- \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t + \pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi + 2t}{4} \right) \right] \right] \quad n, k \in \mathbb{N}$$

$$(5.04) \quad f(t_+) = n_k \cdot \left[+ \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi - 2t}{4} \right) \right] \right] \quad n, k \in \mathbb{N}$$

$$(5.05) \quad A_{n/2} = \frac{n_{2k-1}}{2} \quad A_n = \frac{n_{2k}}{2}$$

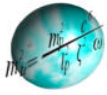
Die ungeradzahigen Linearkombinationen n_k ergeben dabei die halbzahigen Anstiege $A_{n/2}$, die geradzahigen Kombinationen n_k die ganzzahigen Anstiege A_n . Dies veranschaulicht ebenfalls folgendes Bild ganz deutlich, wenn man wieder die Interpretationen über die Anstiege, sprich den Verhältnissen unter symmetrischen Aspekten der unterschiedlichen Periodendauern auf den horizontalen und vertikalen Achsen, in Betracht zieht.

Bild5/2: Linearkombinationen ($n=2$ und $n=3$) mit den Anstiegen 1 (grün) und $3/2$ (cyan)



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Unsere ursprüngliche Kombination (blaue Grafen in den Bildern 5/1 und 5/2) gemäß den definierten Randbedingungen aus Kapitel 1 ist also außerhalb der Potentialgrenzen mathematisch nicht konsistent mit den gerade gemachten Aussagen hinsichtlich der empirischen Teilfunktio-



nen (5.01 und 5.02). Wir müssen hier also doch (Stichpunkt: komplexe Drehungen) den komplexen Zahlenbereich mit ins Visier nehmen. Dazu unterziehen wir die Teilfunktionen einer Fourier-Transformation. Zuerst (5.03).

$$(5.06) \quad f(t_-) = a_0/2 + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(5.07) \quad a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t+\pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi+2t}{4} \right) \right] dt \quad 1)$$

$$(5.08) \quad a_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t+\pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi+2t}{4} \right) \right] \cos(nt) dt \quad 1)$$

$$(5.09) \quad b_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t+\pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi+2t}{4} \right) \right] \sin(nt) dt \quad 1)$$

$$(5.10) \quad a_0 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}i$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{5} \quad a_6 = 0 \quad \dots$$

$$b_1 = -1-i \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad b_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \quad b_4 = \frac{1}{4} \quad b_5 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i \quad b_6 = \frac{1}{6} \quad \dots$$

¹⁾ berechnete Koeffizienten in (5.10) mit Hilfe von „<https://www.integralrechner.de>“

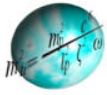
Hier sieht man schon, dass unsere rein reelwertige Betrachtungsweise unserer in den Kapiteln 1. bis 3. konstruierten Cosinus-Sinus-Summenformel (3.01) um die komplexen Koeffizienten a_0 sowie $b_{(2k-1)}$ ergänzt werden muss.

Dem gleichen Prozedere unterziehen wir nun auch noch die Teilgleichung (5.04).

$$(5.11) \quad f(t_+) = a_0/2 + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(5.12) \quad a_0 = +\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi-2t}{4} \right) \right] dt \quad 1)$$

$$(5.13) \quad a_n = +\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi-2t}{4} \right) \right] \cos(nt) dt \quad 1)$$



$$(5.14) \quad b_n = +\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] + \left(\frac{\pi - 2t}{4} \right) \sin(nt) dt \quad ^1)$$

$$(5.15) \quad a_0 = +\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}i$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{5} \quad a_6 = 0 \quad \dots$$

$$b_1 = -1 - i \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad b_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \quad b_4 = \frac{1}{4} \quad b_5 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i \quad b_6 = \frac{1}{6} \quad \dots$$

¹⁾ berechnete Koeffizienten in (5.15) mit Hilfe von „<https://www.integralrechner.de>“

Bis auf die entgegengesetzten Vorzeichen in a_0 sind auch bei dieser Teilgleichung die gleichen Aussagen zu treffen.

Das heißt, dass in die Teilfunktionen (5.03) und (5.04) über alle t-Perioden reelwertige Konsequenzen (lineare Verschiebungen der Perioden in Richtung der vertikalen Skalenachse) einfließen, welche durch komplexe Koeffizienten in der Summation und umgekehrt verursacht werden.

Damit korrigiert sich die Summationsformel (3.01) durch Addition von (5.06) und (5.11) wie folgt:

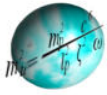
$$(5.16) \quad P_\infty = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos[(2k-1) \cdot t]}{2k-1} + \frac{\sin[2k \cdot t]}{2k} + \frac{(-1-i) \cdot \sin[(2k-1) \cdot t]}{2k-1} \right] \quad k \in \mathbb{N}$$

Wir vereinfachen die obige Gleichung

$$(5.17) \quad f(t) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(mt)}{m} + \frac{\sin(nt)}{n} + \frac{(-1-i) \sin(mt)}{m} \right] \quad m = 2k-1 \quad n = 2k$$

und verallgemeinern unsere korrigierte Summationsformel mit

$$(5.18) \quad \frac{2}{m;n} = c_q \quad k = m, n = |q| \quad q \in G$$



für die Anwendung auf die komplexe Polarform wie folgt:

$$(5.19) \quad f(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q [\cos(qt) + \sin(qt) + u] \quad u = -\sin(qt) - i \sin(qt)$$

Damit verschwindet der Faktor 2 vor der Summe, da jetzt auch der Index q von minus Unendlich bis plus Unendlich läuft. Der reelle Sinusterm hebt sich weg und es bleibt stehen:

$$(5.20) \quad f(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q [\cos(qt) - i \sin(qt)]$$

Eigentlich sieht man jetzt schon das komplex-polare Endergebnis. Wir rechnen aber weiter, indem wir die komplexen Darstellungen vom Cosinus und vom Sinus

$$(5.21) \quad \cos(qt) = \frac{1}{2} (e^{iqt} + e^{-iqt})$$

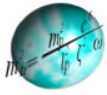
$$(5.22) \quad \sin(qt) = -\frac{i}{2} (e^{iqt} - e^{-iqt})$$

in die Gleichung (5.20) einsetzen. Jetzt verschwinden der Cosinus- und der Sinusterm.

$$(5.23) \quad f(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q \left[\frac{1}{2} (e^{iqt} + e^{-iqt}) + i \frac{1}{2} (e^{iqt} - e^{-iqt}) \right]$$

Wir ziehen die 2 unter das c_q und multiplizieren die rechte runde Klammer mit i aus und erhalten:

$$(5.24) \quad f(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q \frac{1}{2} (e^{iqt} + e^{-iqt} - e^{iqt} + e^{-iqt})$$



In der verbleibenden Klammer hebt sich e^{iqt} auf, der entstehende Faktor 2 kürzt sich, sodass folgende einfache **komplexe Polardarstellung unserer diskutierten Fourier-Reihe** stehen bleibt:

$$(5.25) \quad f(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q \cdot e^{-iqt}$$

Interessant ist es herauszufinden, wie sich hier die komplexen Fourier-Koeffizienten c_q entwickeln bzw. ob es ein bestimmtes Muster in Abhängigkeit von q als Element der ganzen Zahlen gibt. Dabei wenden wir wieder das gleiche Verfahren wie oben im Kapitel, nur mit der Integralformel für die komplexe Darstellung, an. Zuerst für die Teilfunktion $f(t_-)$, die man, unter Zuhilfenahme durch „<https://www.integralrechner.de>“ in der Exponentialschreibweise für den Cotangens, auch so schreiben kann:

$$(5.26) \quad f(t_-) = \frac{\ln \left[\frac{i(e^{i/2} - e^{-i/2})}{ie^{i/2} + ie^{-i/2}} \right]}{2} + \frac{t + \pi}{4}$$

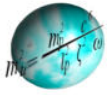
Nun wenden wir das Verfahren für die Berechnung der komplexen Koeffizienten an und verwenden wieder die Cotangensformulierung:

$$(5.27) \quad c_q^- = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t_-) \cdot e^{-iqt} dt \quad q \in G$$

$$(5.28) \quad c_q^- = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t+\pi}{2} \right) \right) \right] + \left(\frac{\pi+2t}{4} \right) \right] (e^{-iqt}) dt \quad ^1)$$

$$(5.29) \quad c_0^- = -\pi/4 + \pi/4 i \quad c_{+1}^- = -1 - \pi/2 i \quad c_{+3}^- = -\pi/3 - \pi/6 i \quad c_{+5}^- = -\pi/5 - \pi/10 i \quad c_{+7}^- = -\pi/7 - \pi/14 i \quad \dots$$

¹⁾ berechnete Koeffizienten in (5.29) mit Hilfe von „<https://www.integralrechner.de>“



Alle Koeffizienten mit negativen q sowie alle Koeffizienten mit geradzahligen q sind nicht Lösung der Gleichung, da hier die Integrale orthogonal zueinander sind. Für alle Koeffizienten mit positiven ungeraden q verbleibt folgendes Muster:

$$(5.30) \quad c_0^- = -\pi/4 + \pi/4 i \quad c_{q=+(2n-1)}^- = \frac{1}{2n} \sqrt{5} e^{-i/2} \quad |q|, n \in \mathbb{N}$$

Das gleiche Prozedere spielen wir nun auch für die Teilfunktion $f(t_+)$ durch:

$$(5.31) \quad f(t_+) = \frac{\ln \left[\frac{i(e^{i/2} + e^{-i/2})}{e^{-i/2} - e^{i/2}} \right]}{2} + \frac{\pi - 2t}{4}$$

$$(5.32) \quad c_q^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t_+) \cdot e^{-iqt} dt \quad q \in G$$

$$(5.33) \quad c_q^+ = + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\left[0,5 \ln \left(\cot \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] + \left(\frac{\pi - 2t}{4} \right) \right] (e^{-iqt}) dt \quad 1)$$

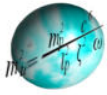
$$(5.34) \quad c_0^+ = -\pi/4 \quad c_{+1}^+ = 1 + \frac{1}{2}i \quad c_{+3}^+ = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}i \quad c_{+5}^+ = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i \quad c_{+7}^+ = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}i \quad \dots$$

¹⁾ berechnete Koeffizienten in (5.34) mit Hilfe von „<https://www.integralrechner.de>“

Auch bei der Betrachtung der anderen Teilfunktion kann man dieselben Aussagen zum Koeffizientenmuster allerdings mit umgekehrten Vorzeichen treffen. Das bedeutet, dass hier die komplexe Phase der e-Funktion in der Koeffizientenformel im Gegensatz zu oben positiv ist. Ein Unterschied ist auch, dass der imaginäre Term des Nullkoeffizienten einen Wert von Null hat:

$$(5.35) \quad c_0^+ = -\pi/4 \quad c_{q=+(2n-1)}^+ = \frac{1}{2n} \sqrt{5} e^{i/2} \quad |q|, n \in \mathbb{N}$$

Betrachten wir die c_q^+ und c_q^- als komplexwertige Amplitudenwerte, könnten wir alle der unendlichen Amplituden komplex konjugiert quadrieren und davon die Summe bilden, um eine



Aussage über die Wahrscheinlichkeitsdichten bzw. Konvergenzbeträge unserer polaren Wellenfunktion (5.25) bezüglich seiner trigonometrischen Näherungsfunktionen $f(t_+)$ und $f(t_-)$ treffen zu können. Warum das so möglich sein sollte, wird im folgendem Kapitel 6 näher erläutert.

$$(5.36) \quad [f_{\Sigma}(t)]^2 = 2 \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{2n} e^{\pm i/2} e^{-iqt} \right) \left(\frac{\sqrt{5}}{2n} e^{\pm i/2} e^{-iqt} \right)^*$$

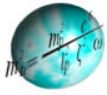
Die Verdoppelung der Summe ist deshalb erfolgt, damit der Laufindex q von 1 bis unendlich gehen kann. Vollständig komplex konjugiert ausmultipliziert bleibt für ungerade n folgende Konvergenzsumme stehen:

$$(5.37) \quad [f_{\Sigma}(t)]^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{5}{4} (2k-1)^{-2} \right] = 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} \xi(2) = \frac{15}{8} \xi(2)$$

Die Summenfunktion f_{Σ} setzt sich aus den beiden Zuständen $f(t_+)$ und $f(t_-)$ zusammen. $\xi(2)$ ist eine Konstante C , damit wird eine Normierung gewährleistet. Wir stellen also fest, dass der Bruch $15/8$ nicht in zwei Wahrscheinlichkeiten für jeden Zustand von 1 zu zerlegen ist. Wir erhalten hier also einen Mischzustand der Wahrscheinlichkeit 1 und $7/8$:

$$(5.38) \quad \frac{\rho_{\langle f_{t_+} f_{t_-} \rangle}}{C} = \langle 1 + 7/8 \rangle \quad \rho/C = 1 \rightarrow \rho_{Boson} \quad \rho/C = 7/8 \rightarrow \rho_{Fermion}$$

Auf die Vermutung, dass es sich bezüglich der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten um das Verhältnis der Energiedichten von Bosonen und Fermionen untereinander in sehr energiereichen Systemen im thermodynamischen Gleichgewicht handeln könnte, wird in den Kapiteln 8 und 9 noch näher nachgegangen.



6. Verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitsdichte 1. Ordnung über die Polarform

Wir verallgemeinern die gerade gemachten Überlegungen in der Hinsicht, dass wir die polare Summenformel (5.25) stark vereinfachen, indem wir c_q ohne weitere Differenzierung durch $1/k$ ersetzen und gleichzeitig den Index von $k=1$ bis Unendlich laufen lassen:

$$(6.01) \quad f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{-ikt} \quad k = m, n \in \mathbb{N}$$

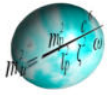
Wir stellen fest, dass jede Einzelsumme ein in sich abgeschlossene Integralform (Kreis) ist, sodass jeder Summand extra quadriert aufaddiert werden darf. Wir quadrieren also jedes der unendlichen Glieder komplex konjugiert und summieren diese, wie auch im vorherigen Kapitel 5, um eine Wahrscheinlichkeitsdichte aus aufaddierten (kumulierten) unendlich vielen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erhalten:

$$(6.02) \quad [f(t_\Sigma)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot e^{-ikt} \right) \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot e^{-ikt} \right)^* \quad k \in \mathbb{N}$$

Wir erhalten also die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte, über die unendliche Summation der verallgemeinerten Polarform, was hinsichtlich der Potentialgrenzen unverdächtig ist. Denn durch die Symmetrieoperationen der Einzelrotationen stimmen übertragen auf den reellen Zahlenbereich die geforderten Nullpunkte an den Potentialgrenzen hier auch mit den Betrachtungen unserer definierten sinusartigen Funktionen völlig überein.

$$(6.03) \quad \rho_{1. \text{ Ordnung}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \xi(2) = \pi^2/6 \quad k \in \mathbb{N}$$

Wir erhalten so sofort die **Wahrscheinlichkeitsdichte** $(1/k)^2$ einer Verteilung $P^n(t)$ mit exakt dem **Konvergenzwert** der Zetafunktion **$\xi(2)$** . Die Frage ist hier nur, wie konkret die dazugehörige Funktionsgleichung $P^n(t)$ **erster Ordnung** aussieht? Müsste man doch dafür nach (6.03) die Ableitung der Stammfunktion der unendlichen Summe $1/k^2$ finden. Und dies noch bei



gleichzeitiger Transformation der diskret laufenden Indizes k als Elemente der natürlichen Zahlen ohne die Null in kontinuierliche Skalenwerte t als Elemente der irrationalen Zahlen von Null bis Unendlich. Dieses Problem gehen wir im nächsten Kapitel an.

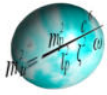
7. Transformationen mittels spektraler Energiefunktionen und deren Verteilung

Um die oben aufgeworfenen Schwierigkeiten bei der Ermittlung der Funktionen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen über die verallgemeinerte Polarform zu umgehen, bedienen wir uns vorerst der klassischen Physik und setzen folgendes voraus: Um sowohl Wahrscheinlichkeitsdichten als auch die Funktionen der spektralen Verteilungen mit den Einlassungen dieses Skriptes eins zu eins vergleichen zu können, soll letztendlich die hier zu betrachtenden Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion primär zweiter Ordnung sein bzw. eine polynominelle Abhängigkeit 2. Ordnung besitzen. Die dazu benötigte, nicht durch ein ε moderierte Dichtefunktion, die spektrale Energiedichte, sollte dann natürlich auch proportional einer klassischen spektralen Energiedichte $u(\vartheta)$ zweiter Ordnung sein. Das hätte das physikalisch experimentell untermauerte reale Ergebnis, dass sowohl eine klassische Energieverteilungsfunktion 2. Ordnung als auch die ausgiebig im Skript diskutierten Fourier-Reihen dreidimensionale Raumbereiche mit ihren Energiedichten repräsentieren.

Um auf die Funktion einer, dann noch zu integrierenden, spektralen Energiedichteverteilung abzuheben, müssen zuerst die Funktionswerte (Amplitude A bzw. Frequenz ϑ) von Null bis Unendlich laufen. Der Laufindex k wird dementsprechend bezüglich der Amplitude A durch m substituiert, wobei das Substitut nun aus dem positiven irrationalen Zahlenbereich ohne die Mengen zwischen 0 bis 1 stammen muss,

$$(7.01) \quad A_m = \frac{1}{m-1} \quad m \in \mathfrak{I}^+ \{0 \emptyset 1\} \quad \lim A_1 \rightarrow \infty \quad \lim A_\infty \rightarrow 0$$

wodurch dann die Amplitudenwerte von Unendlich bis Null laufen. Bezüglich der Frequenz ϑ bedeutet dies, nur entgegengesetzt, das gleiche:



$$(7.02) \quad \mathcal{G}_m = m - 1 \quad m \in \mathfrak{T}^+ \setminus \{0, 1\} \quad \lim \mathcal{G}_1 \rightarrow 0 \quad \lim \mathcal{G}_\infty \rightarrow \infty$$

Die Teilmenge der positiven ganzen Zahlen aus der Menge aller positiven irrationalen Zahlen m hängt mit dem oben transformierten Laufindex k dann also wie folgt zusammen:

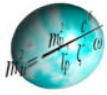
$$(7.03) \quad k = \left(\otimes G^+ \right)_m^{\mathfrak{T}^+} + 1$$

Die klassische Entsprechung einer Energiedichte ist wie schon erwähnt eine Proportionale der spektralen Energiedichte $u(\mathcal{G})$. Unseren Ausgangsbedingungen zufolge deshalb proportional, weil alle einheitsbehafteten Konstanten wie k_B , h und c gleich 1 gesetzt werden. Außerdem halten wir die Temperatur T fest, da man auch hier im Kapitel 7 nur ein abgeschlossenes Raumsystem im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet. Wir verwenden daher wie im gesamten Skript statt des Proportionalitätszeichens ($\sim$) auch weiterhin das Gleichheitszeichen ($=$). Wir können also schreiben:

$$(7.04) \quad u(\mathcal{G}) = \int_0^\infty E d\mathcal{G} \rightarrow E = h \cdot \mathcal{G} \rightarrow u(\mathcal{G}) = \int_0^\infty \mathcal{G} d\mathcal{G} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^2$$

Man erhält wie gewollt eine Funktion 2. Ordnung. Diese Funktion ist aber keine Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Dichte entsprechend einer spektralen Energiedichteverteilung. Es ist lediglich die Gesamtenergie pro infinitesimalen Frequenzbereich und Volumen, also eine spektrale Energiedichte $u(\mathcal{G})$. Wie kommen wir nun zu dem moderierenden Term $\varepsilon(\mathcal{G})$, damit aus einer spektralen Energiedichte dann eine spektrale Energiedichteverteilung und aus dieser eine konkrete Wahrscheinlichkeitsdichte p wird? Für eine polynominelle Abhängigkeit zweiter Ordnung $n = 2$, rechts in (7.05) völlig spekulativ verallgemeinert, bedeutet dies:

$$(7.05) \quad \frac{\rho_{2+1}}{2} = \int_0^\infty \varepsilon(\mathcal{G}) \frac{\mathcal{G}^2}{2} d\mathcal{G} \rightarrow \rho_{n+1} = n! C_{\mathcal{G}}(n+1) = \int_0^\infty \varepsilon(\mathcal{G}) \mathcal{G}^n d\mathcal{G}$$



Den exakten Konvergenzbetrag $n! \cdot C_g$ (die konkrete Wahrscheinlichkeitsdichte) für eine Abhängigkeit 1. Ordnung haben wir schon mit Formel (6.03) berechnet. Also wird die Konstante $C_g(n+1)$ durch die jeweilige Zetafunktion $\xi(n+1)$ ersetzt. Ableitend daraus ergibt sich dann:

$$(7.06) \quad \rho_2 = 1! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1! \xi_g(2) = \int_0^{\infty} \varepsilon(g) g^1 dg$$

Wir können abermals über die Zetafunktionen $\xi(s)$ spekulativ noch weiter verallgemeinern, wenn wir uns (7.05) und (7.06) zu Gemüte ziehen:

$$(7.07) \quad \rho_{n+1} = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} = n! \xi_g(n+1) = \int_0^{\infty} \varepsilon(g) g^n dg$$

Nun stellen wir diese verallgemeinert spekulativen Aussagen für die polynominellen Abhängigkeiten der ersten, zweiten und n-ten Ordnung zusammen:

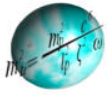
$$(7.08) \quad 1. \text{ Ordnung:} \quad \rho_2 = \xi_g(2) = \int_0^{\infty} \varepsilon(g) g dg$$

$$(7.09) \quad 2. \text{ Ordnung:} \quad \rho_3 = 2 \cdot \xi_g(3) = \int_0^{\infty} \varepsilon(g) g^2 dg$$

$$(7.10) \quad n\text{-te Ordnung:} \quad \rho_{n+1} = n! \xi_g(n+1) = \int_0^{\infty} \varepsilon(g) g^n dg$$

Stellt man die adäquaten spekulativen Überlegungen hinsichtlich der Amplituden A an, kommt man letztendlich zu diesen Ergebnissen:

$$(7.11) \quad 1. \text{ Ordnung:} \quad \rho_2 = \xi_A(2) = \int_0^{\infty} \varepsilon(A) A^{-3} dA$$



$$(7.12) \quad 2. \text{ Ordnung:} \quad \rho_3 = 2 \cdot \xi_A(3) = \int_0^{\infty} \varepsilon(A) A^{-4} dA$$

$$(7.13) \quad n\text{-te Ordnung:} \quad \rho_{n+1} = n! \xi_A(n+1) = \int_0^{\infty} \varepsilon(A) A^{-(n+2)} dA$$

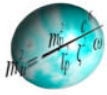
Auf Seite 5, Kapitel 1, hatten wir festgestellt, dass die Voraussetzungen für die Konstruktion sinusartiger Wellen im reellen Wirkungsbereich in einem definierten Potential zu stehenden Wellen führen, was vergleichbar ist mit einer Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht eines idealen Schwarzen Körpers. Darauf kaprizieren sich ja die Abhandlungen in weiten Teilen dieses Skriptes. Deshalb drängt sich einem nicht erst jetzt die Vermutung auf, dass der innere Integralterm ε der Gleichungen (7.05) bis (7.13) von der Grundstruktur her nichts Anderes sein sollte, als der mathematisch vereinfachte e-Term der der Planck'schen Strahlungsformel. Weiter hinten im Skript wird dieser Term auch noch mathematisch hergeleitet. Wenn dieser das also ist, könnten wir dann auch damit den moderierenden ε -Term ersetzen und konkrete Funktionsgleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen aufstellen. Die Verteilungskoeffizienten ε lauten bezogen auf unsere „Planck'schen“ Überlegungen

$$(7.14) \quad \varepsilon(g) = \frac{1}{e^g - 1} \quad \varepsilon(A) = \frac{1}{e^{A^{-1}} - 1}$$

als mit den verallgemeinerten inneren Integraltermen zur möglichen Berechnung der konkreten Wahrscheinlichkeitsdichten mit dem Ziel, zu mindestens für die ersten 3. Ordnungen, die oben gemachten Spekulationen zu beseitigen.

$$(7.15) \quad \rho_{n+1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^g - 1} g^n dg \quad \rho_{n+1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{A^{-1}} - 1} A^{-(n+2)} dA$$

Mittels „<https://www.integralrechner.de>“ konnten für die ersten drei Ordnungen über die Amplitudenformeln folgende Annäherungen berechnet werden:



(7.16) 1. Ordnung:

$$\rho_2 = \int_0^\infty \frac{1}{e^{A^{-1}} - 1} A^{-3} dA = -\frac{3\ln^2(-1) + 2\pi^2}{6}$$
$$\cong 1,644934066848226... \cong \xi(2)$$

(7.17) 2. Ordnung:

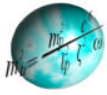
$$\rho_3 = \int_0^\infty \frac{1}{e^{A^{-1}} - 1} A^{-4} dA = 2\xi(3) + \frac{\ln^3(-1) + \pi^2 \ln(-1)}{3}$$
$$\cong 2,404113806319189... \cong 2\xi(3)$$

(7.18) 3. Ordnung:

$$\rho_4 = \int_0^\infty \frac{1}{e^{A^{-1}} - 1} A^{-5} dA = -\frac{15\ln^4(-1) + 30\pi^2 \ln^2(-1) + 11\pi^4}{60}$$
$$\cong 6,493939402266829... \cong 6\xi(4)$$

Zumindest für die ersten drei Ordnungen ist so eine frappierende Übereinstimmung mit unseren obigen spekulativen Überlegungen festzustellen. Bei den übrigen Ordnungen und komplett über die Frequenzformeln ist der „<https://www.integralrechner.de>“ ausgestiegen, hat erklärt, dass trotz gefundener, teilweiser sehr komplizierter, Stammfunktionen obiger polylogarithmischer Natur, keine Näherungen gemacht werden konnten. Auch rein numerische Näherungen konnten ebenso mit dem Verweis auf mögliche Divergenzen nicht realisiert werden. Die Frequenzformel für die 2. Ordnung wird allerdings genauso auch in der Literatur (u.a. „Wikipedia“: Apéry-Konstante, Integraldarstellungen) als exakter Wert, also nicht wie oben als Näherung, beschrieben. Damit liegt die Vermutung nahe, dass unsere Zetafunktionen-Annäherungen auch die genauen Konvergenzbeträge darstellen.

Inwieweit auch folgender allgemeiner Zusammenhang von Integraldarstellungen zumindest für positive ganze n-Ordnungen stimmig ist oder die Ordnungsgrade n gar auf rationale, irrationale oder sogar komplexe Zahlenbereiche anwendbar sind, muss nun wirklich in das unbewiesene Reich der Spekulationen verwiesen werden.



$$(7.19) \quad \rho_{n+1} = \int_0^\infty \frac{1}{e^g - 1} g^n dg = \int_0^\infty \frac{1}{e^{A^{-1}} - 1} A^{-(n+2)} dA = n! \xi(n+1) \quad n \in \mathbb{N}$$

Zusammenfassend zu diesem Abschnitt kann man auf jeden Fall widerspruchsfrei feststellen, dass hinsichtlich der in diesem Skript gemachten Voraussetzungen über sinusartige Funktionen hin zur verallgemeinerten komplexen Polarform die definierte Linearkombination mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der **2. Ordnung** eine **Wahrscheinlichkeitsdichte** von exakt **2·ξ(3)** aufweist.

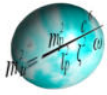
$$(7.20) \quad \rho_3 = \int_0^\infty \frac{g^2}{e^g - 1} dg = \int_0^\infty \frac{1}{A^4 (e^{A^{-1}} - 1)} dA = 2\xi(3) = 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}$$

8. Wahrscheinlichkeitsdichten und deren Verteilungen über sinusartige Funktionen

Wir nehmen die ursprüngliche Kombination und quadrieren diese. Dann wird nach dt wie im Kapitel 3. wieder über die Potentialgrenzen von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ integriert. Wir erhalten so das Flächenintegral I_C unter dem Grafen der quadrierten Linearkombination ausschließlich der Polstelle über Null:

$$(8.01) \quad I_C = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\sum_{k=1}^\infty \left[\frac{\cos[(2k-1) \cdot t]}{2k-1} + \frac{\sin[2k \cdot t]}{2k} \right] \right]^2 dt \quad k \in \mathbb{N}$$

Wie wir wissen, besteht dieses Gesamtintegral aus zwei verschiedenartigen Teilintegralen (siehe Bild 3/1): Das Integral I_A in den Grenzen von $-\pi/2$ bis 0 sowie das Integral I_B in den Grenzen von 0 bis $+\pi/2$. Nun werden sowohl das Gesamtintegral als auch die Teilintegrale probeweise von $k = 1$ bis $k = 8$ entwickelt und nach dt in den besagten Grenzen nach jedem weiteren k integriert. Die Ergebnisse sind in folgender tabellarischen Übersicht zusammengefasst:



k	I_A	I_B	I_C
---	-------	-------	-------

1	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
2	$5\pi/16 - 2/3$	$5\pi/16 + 2/3$	$5\pi/8$
3	$49\pi/144 - 8/15$	$49\pi/144 + 8/15$	$49\pi/72$
4	$205\pi/576 - 16/21$	$205\pi/576 + 16/21$	$205\pi/288$
5	$5269\pi/14400 - 44/63$	$5269\pi/14400 + 44/63$	$5269\pi/7200$
6	$5369\pi/14400 - 3638/4455$	$5369\pi/14400 + 3638/4455$	$5369\pi/7200$
7	$26668\pi/705600 - 45152/57915$	$26668\pi/705600 + 45152/57915$	$26668\pi/352800$
8	$1077749\pi/2822400 - 345728/405405$	$1077749\pi/2822400 + 345728/405405$	$1077749\pi/1411200$
berechnet mittels „https://www.integralrechner.de“			

(n)	$I_{C(n)}/2 - F_{(n)}$	$I_{C(n)}/2 + F_{(n)}$	$I_{A(n)} + I_{B(n)}$
-----	------------------------	------------------------	-----------------------

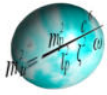
∞	0,2401284047478484 ...	2,343727985277136 ...	$\pi^3/12$ (?)
	ermittelt über die Funktion (3.02)	ermittelt über die Funktion (3.03)	$I_{A(\infty)} + I_{B(\infty)}$
rein numerische Abschätzung durch „https://www.integralrechner.de“			

Das Muster der Reihenentwicklung setzt sich auch über $k > 8$ hinaus weiter fort. Wenn man annimmt, dass die Konvergenzbeträge im Unendlichen der Integrale I_A , I_B und I_C wie in Kapitel 3 dargelegt, die obigen numerischen Abschätzungen haben, dann kann man auch den vermeintlichen Konvergenzbetrag des Faktors $F_{(n)}$ abschätzen. Da dieser bei I_A subtrahiert und bei I_B jeweils addiert wird, ergibt sich folgende Formel für das Muster der Reihenentwicklung:

$$(8.02) \quad I_{C(n)} = \left(\frac{I_{C(n)}}{2} - F_{(n)} \right) + \left(\frac{I_{C(n)}}{2} + F_{(n)} \right) = I_{A(n)} + I_{B(n)}$$

Setzen wir nun unsere gemachten Annahmen hinsichtlich der Konvergenzbeträge in diese Formel ein, erhält man dann auch den numerischen Konvergenzbetrag F_∞ :

$$(8.03) \quad F_\infty = \frac{\pi^3}{24} - I_{A(\infty)} \quad \text{und} \quad F_\infty = I_{B(\infty)} - \frac{\pi^3}{24} \quad \rightarrow \quad F_\infty = 1,0517997903...$$



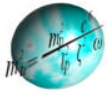
Was hat dieser Differenzbetrag nun zu bedeuten? Interpretieren wir diesen, so erhaltenen Betrag, als eine Wahrscheinlichkeitsdichte ρ_F und vergleichen diese mit der aus der Strahlungsformel 2. Ordnung erhaltenen (wir nennen sie mal mit vorhergehendem Gehorsam ρ_B) gemäß Gleichung (7.20), stellen wir überraschenderweise folgendes fest:

$$(8.04) \quad \frac{\rho_F}{\rho_B} = \frac{2 \cdot 1,0517997903 \dots}{2 \cdot 1,2020569032 \dots} = \frac{7}{8} \quad (!)$$

Das ist exakt das Verhältnis der Wahrscheinlichkeitsdichten von Fermionen zu Bosonen im thermodynamischen Gleichgewicht (und damit auch bei gleichen sehr hohen Temperaturen) in einem gemeinsamen System. Genauso wie es auch kurz nach dem Urknall zwischen Strahlung und relativistischen Teilchen (Neutrinos) und höchstenergetischen Elektronen der Fall war. Der im Kapitel 7 hergeleitete Wert einer Wahrscheinlichkeitsdichte 2. Ordnung muss also der von Bosonen entsprechen, wenn sowohl der negative Anteil (Antimaterie) als auch der positive Anteil an Fermionen (Materie) einem Verhältnis von $\frac{7}{8}$ zum Bosonenanteil entspricht. Und dies ist auch so: Die im Kapitel 7 berechnete Dichte von $2 \cdot \xi(3)$ über die Planck'sche Strahlungsformel entspricht auch in der Realität ausschließlich der Wahrscheinlichkeitsdichte von Bosonen. Das bedeutet allerdings im Umkehrschluss auch, dass sich die Fermionendichte aus einer der für die Zetafunktion 3 sehr ähnlichen unendlichen Summenformel berechnen lässt, wenn man einfach die positiven Laufindizes k weglässt, was natürlich stark darauf hinweist, dass hier bestimmte sinusartige Wellenfraktionen herausgefiltert sind.

Deshalb und im Kontext mit den Voraussetzungen und Prämissen dieses Skriptes sowie vorhergehender Betrachtungen, besonders die im Kapitel 5., Gleichungen (5.37) und (5.38) dargestellten, sollte man bezüglich der **Wahrscheinlichkeitsdichten ρ von Fermionen F und Bosonen B** schon feststellen dürfen:

$$(8.05) \quad \rho_B = 2 \cdot \xi(3) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \quad \rho_F = 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot \xi(3) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-3} \quad k \in \mathbb{N}$$



9. Quantenmechanische Verallgemeinerungen über die Näherungsfunktionen

Beleuchten wir die Eigenschaften der begrenzten Integrale I_A und I_B unserer beiden Näherungsfunktionen (3.02) und (3.03) im quadrierten Kontext, kann man daraus existenzielle quantenphysikalische Konsequenzen ableiten, die sich mehr oder weniger zwanghaft aus der mathematischen Betrachtung heraus ergeben und die, wie in den nächsten Kapiteln zu sehen, letztendlich sogar bis hin zur Dirac-Gleichung führen.

$$(9.01) \quad I_A = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\ln \cot(\frac{t}{2})}{2} - \frac{\pi - 2t}{4} \right]^2 dt$$

$\mathbf{b}$ $\mathbf{a}$

$$(9.02) \quad I_B = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\ln \cot(\frac{t}{2})}{2} + \frac{\pi - 2t}{4} \right]^2 dt$$

Schauen uns wir uns zuerst die **Addition** der beiden Teilintegrale in den Grenzen von 0 bis $\pi/2$ an:

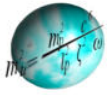
$$(9.03) \quad I_A + I_B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(a+b)^2 + (-a+b)^2 \right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2) dt$$

$$(9.04) \quad I_A + I_B = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 + b^2) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 dt$$

$$(9.05) \quad I_A + I_B = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^3}{16} = \frac{\pi^3}{12} \quad 1)$$

1) berechnet durch: „<https://www.integralrechner.de>“

Der Konvergenzbetrag über die beiden geschlossenen Integrale bedeutet, dass es sich bei dieser Addition (9.04) um die Formel eines Normierungsbetrages in den angegebenen Grenzen handelt. Anders ausgedrückt handelt es sich bei dieser Formeloperation um eine echte Wahrscheinlichkeitsverteilung, da sowohl keine Werte kleiner gleich Null als auch Unendlich



auftreten, damit also alles normierbar ist und auf konkrete Wahrscheinlichkeitsdichten abgehoben werden kann (quadratintegrierbare Gleichungen). Diese Aussagen treffen auf alle aneinandergestückelten π -Bereiche zu, wie eine Auswertung mittels „<https://www.integralrechner.de>“ zumindest für die 9 untersuchten π -Bereiche mit den betreffendem Entwicklungsmuster vermuten lässt:

(9.06)

$t_1 \rightarrow t_2 :$	$-\pi \rightarrow 0 :$	$I_A + I_B = 0,1666\pi^3$	
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$0 \rightarrow \pi :$	$I_A + I_B = 0,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 0$
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$\pi \rightarrow 2\pi :$	$I_A + I_B = 0,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 0$
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$2\pi \rightarrow 3\pi :$	$I_A + I_B = 2,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 2$
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$3\pi \rightarrow 4\pi :$	$I_A + I_B = 4,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 2$
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$4\pi \rightarrow 5\pi :$	$I_A + I_B = 8,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 4$
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$5\pi \rightarrow 6\pi :$	$I_A + I_B = 12,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 4$
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$6\pi \rightarrow 7\pi :$	$I_A + I_B = 18,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 6$
$t_1 \rightarrow t_2 :$	$7\pi \rightarrow 8\pi :$	$I_A + I_B = 24,1666\pi^3$	$\Delta/\pi^3 = 6$

Die Gleichung (9.04) lässt sich somit aufgrund seiner Struktur völlig unproblematisch auf den gesamten **komplexen Zahlenbereich** folgendermaßen allgemein erweitern, wobei sich z aus zwei Vektorfunktionen $f_a=\phi$ und $f_b=\psi$, die von t abhängig sind, zusammensetzt:

$$(9.07) \quad I_A + I_B = 2 \int_{t_1}^{t_2} (a+ib)(a-ib) dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} z z^* dt \quad z = [\vec{\phi}(t), \vec{\psi}(t)]$$

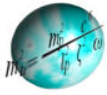
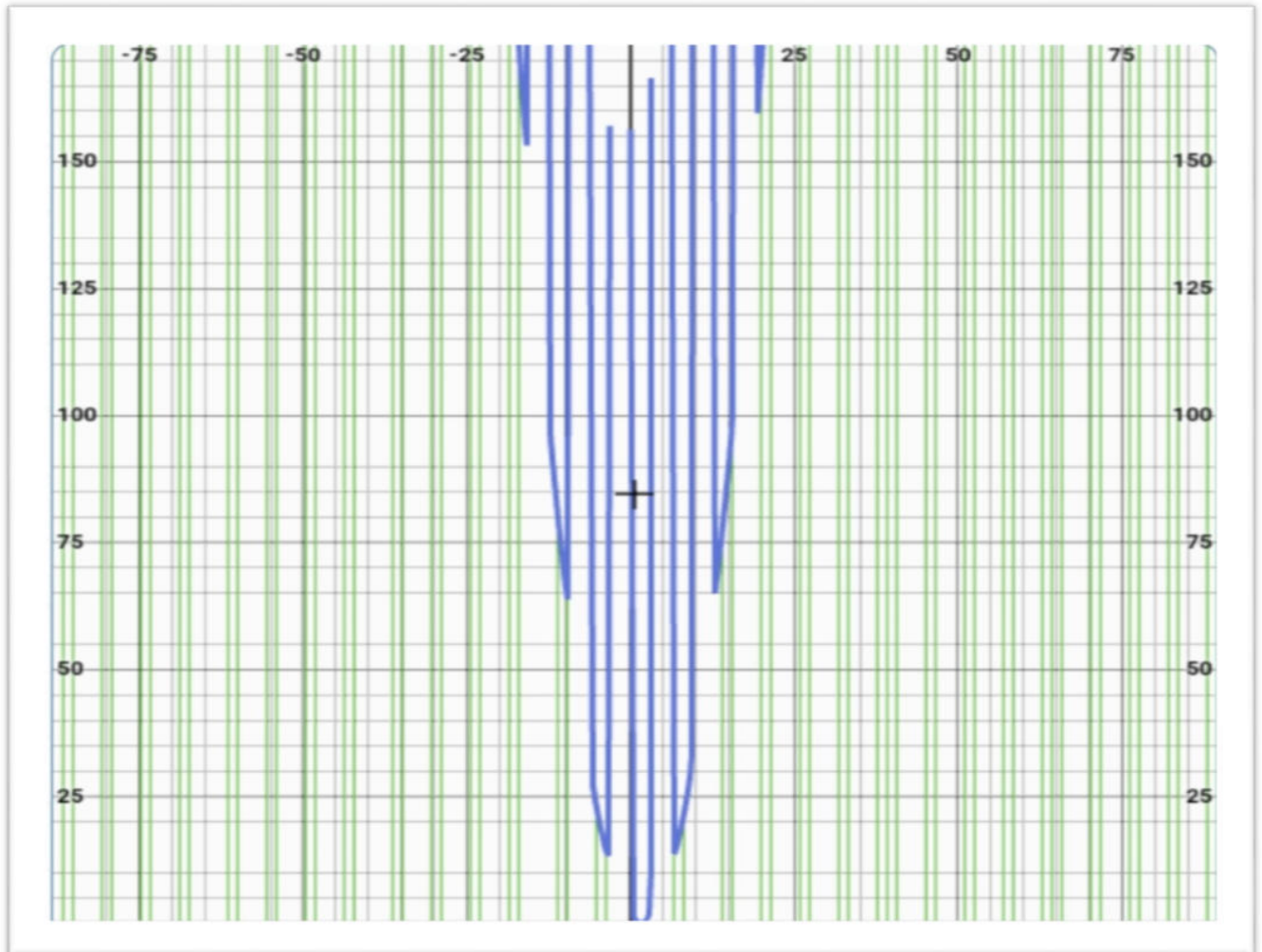
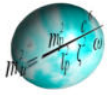


Bild 9/1: Ausschnitt der grafischen Darstellung der Gleichung (9.07)



Grafik erstellt unter Verwendung von „<https://www.integralrechner.de>“

Im Kapitel 8 sind wir aufgrund der quadratischen Entwicklung unserer im Kapitel 1 definierten Fourier-Reihen innerhalb des festgesetzten Integrationsbereiches von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ auf ein Muster gestoßen, welches die Symmetrie der Integralflächen zwischen $-\pi/2$ und 0 sowie zwischen 0 und $\pi/2$ derart (paradoxe Weise symmetrisch) bricht, dass die Fläche im zweiten Quadranten um genau den Betrag verkleinert ist, welcher im ersten Quadranten um genau diesen Betrag auf dessen Fläche aufgeschlagen wurde. Der gefundene zweifache Konvergenzbetrag (sowohl über der negativen als auch der positiven t-Achse) von $\frac{7}{8} \xi(3)$ wurde als Charakteristik (Teilchendichten im hochenergetischen thermodynamischen Gleichgewicht) von Materie- und Antimaterieferrmionen interpretiert. Ohne diese mühsame Arbeit wäre die jetzt



aufzuzeigende triviale **Differenzbildung von I_A und I_B** zu exakt diesem gleichen Ergebnis gekommen. Mehr noch. Wir werden im Folgenden sehen, dass sich damit ganz grundlegende quantenmechanische Zusammenhänge ergeben.

$$(9.08) \quad I_A - I_B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) dt$$

$$(9.09) \quad I_A - I_B = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ab) dt$$

$$(9.10) \quad I_A - I_B = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\pi - 2t] [\ln \cot(\frac{t}{2})] dt$$

$$(9.11) \quad I_A - I_B \cong 2,103599580529... + 1,367... \cdot 10^{-63} i \cong 2 \cdot \frac{7}{8} \xi(3) \quad 1)$$

1) numerische Abschätzung durch: „<https://www.integralrechner.de>“

Im angesetzten Integrationsbereich ergeben sich in völliger Konsistenz mit den Aussagen in den Kapiteln 5 und 8 folgende dort festgestellte Zusammenhänge:

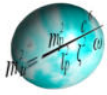
$$(9.12) \quad \frac{|I_A - I_B|_0^{\frac{\pi}{2}}}{2\xi(3)} = \frac{7}{8} = \frac{\rho_F}{\rho_B} \quad (!)$$

Auch hier kann man mit der obigen Notation ebenfalls in den **komplexen Zahlenbereich** hinein verallgemeinern,

$$(9.13) \quad I_A - I_B = 2 \int_{t_1}^{t_2} [(a + ia)(b - ib)] dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} (\vec{\varphi}^* \vec{\phi}) dt$$

denn wenn man die eckige Klammer in (9.13) ausrechnet, erhält man

$$(9.14) \quad [(a + ia)(b - ib)] = \sqrt{2a^2} e^i \sqrt{2b^2} e^{-i} = 2ab$$



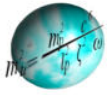
und landet damit wieder bei der Gleichung (9.09). Außerdem fällt bei der Betrachtung des Terms hinter dem zweiten Gleichheitszeichen in (9.13) sofort ins Auge, dass es sich hier um das Skalarprodukt zweier Vektorfunktionen ψ und ϕ handelt, mit welchen Überlappungswahrscheinlichkeiten der beteiligten Funktionen ausgedrückt werden. In der **Dirac-Notation** als sogenanntes „Bracket“ ausgedrückt, sieht unser verallgemeinertes Skalarprodukt dann so aus:

$$(9.15) \quad I_A - I_B = 2 \int_{t_1}^{t_2} (\vec{\varphi}^* \vec{\phi}) dt = 2 \langle \varphi | \phi \rangle_{t_1}^{t_2}$$

Die Analyse bezüglich periodischer, lückenlos aneinander gestückelter Integrationsbereiche mittels der obigen Formel ergab für folgende π -Bereiche entweder reelle Konvergenzbeträge bzw. komplexe Terme mit eindeutigem Entwicklungsmuster. Für $\pi/2$ - bzw. sonstige Zwischenbereiche (bis auf den Bereich $-\pi/2$ bis 0 und 0 bis $+\pi/2$) konnten keine mathematisch nachvollziehbaren Muster bzw. Invarianten und Symmetrien erkannt werden. Das „Bra“ ψ^* und das „Ket“ ϕ stellen dabei folgende Vektorfunktionen dar:

$$(9.16) \quad \vec{\varphi}^* = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{-i(e^{-i/2} + e^{i/2})}{e^{-i/2} - e^{i/2}} \right] \quad \vec{\phi} = \frac{1}{2}(\pi - 2t)$$

Die **Beträge der Realteile** dieser Skalarprodukte sind dabei immer gleich **4 mal** $\frac{7}{8} \xi(3)$. Gemäß der hier und in den Kapiteln 5 und 8 gemachten Aussagen sollte dies bedeuten, als dass es **4 Zustände ψ** (interpretierbar als Materie und Antimaterie mit je Spin hoch und Spin runter) **von Fermionen ($\psi_{M\uparrow} \psi_{M\downarrow} \psi_{A\uparrow} \psi_{A\downarrow}$)** gibt. Die Besetzung der einzelnen vier Zustände von nur $\frac{7}{8}$ bezogen auf diejenigen von Bosonen könnte damit das **Pauli-Verbot** charakterisieren, in dem Sinne, dass gleiche Zustände nicht ein und das selbe Energieniveau besetzen dürfen. Weiterhin sieht man, dass sich **reelle und komplexe Beträge periodisch aller 2π** wiederholen. **Reelle und komplexe Bereiche** zeichnen sich durch **Vorzeichenwechsel** aus. Reelle und komplexe Bereiche beanspruchen damit gemeinsam **für die symmetrische Abbildung** ihrer Realteile auf sich selbst immer **Bereiche von 4π ($\pm \rightarrow \pm$)**, während für die „gespiegelte“ **asymmetrische Abbildung** ihrer Realteile auf sich selbst immer **Bereiche von 2π ($\pm \rightarrow \mp$)** benötigt werden. Dies könnte wieder für die obige **Spin $\frac{1}{2}$** - Interpretation sprechen.

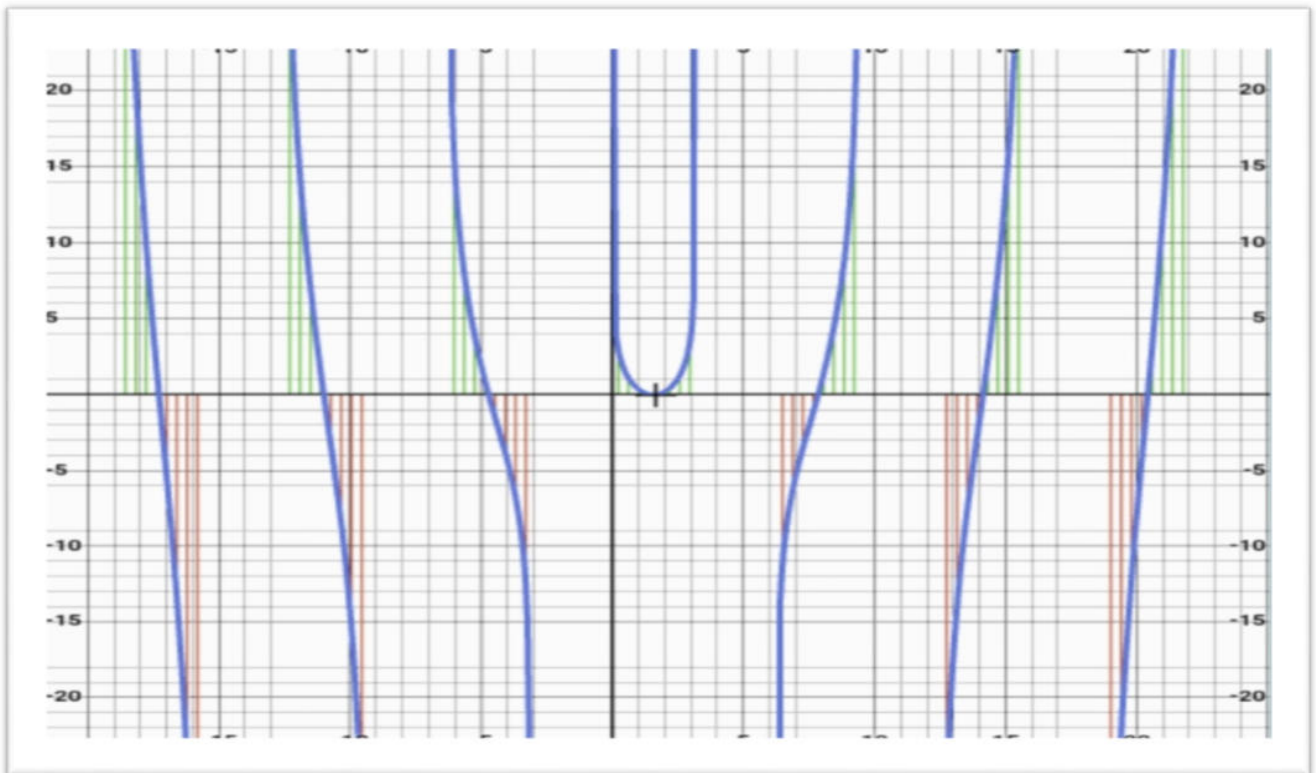


Für 9 Stück von zusammenhängenden π -Bereiche soll das hier mit Hilfe von „<https://www.integralrechner.de>“ verdeutlicht werden:

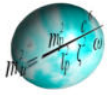
(9.17)

$$\begin{array}{llll}
 t_1 \rightarrow t_2 : & -5\pi \rightarrow -4\pi : & I_A - I_B & = +4\frac{7}{8}\xi(3) \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & -3\pi \rightarrow -2\pi : & I_A - I_B & = -4\frac{7}{8}\xi(3) - i3\pi^3 \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & -2\pi \rightarrow -1\pi : & I_A - I_B & = +4\frac{7}{8}\xi(3) \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & -1\pi \rightarrow \pm 0\pi : & I_A - I_B & = -4\frac{7}{8}\xi(3) - i\pi^3 \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & \pm 0\pi \rightarrow +1\pi : & I_A - I_B & = +4\frac{7}{8}\xi(3) \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & +1\pi \rightarrow +2\pi : & I_A - I_B & = -4\frac{7}{8}\xi(3) + i\pi^3 \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & +2\pi \rightarrow +3\pi : & I_A - I_B & = +4\frac{7}{8}\xi(3) \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & +3\pi \rightarrow +4\pi : & I_A - I_B & = -4\frac{7}{8}\xi(3) + i3\pi^3 \\
 t_1 \rightarrow t_2 : & +4\pi \rightarrow +5\pi : & I_A - I_B & = +4\frac{7}{8}\xi(3)
 \end{array}$$

Bild 9/2: Ausschnitt der grafischen Darstellung des Realteils der Gleichung (9.15)



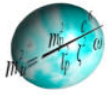
Grafik erstellt unter Verwendung von „<https://www.integralrechner.de>“



10. Herleitung der stationären Schrödinger-Gleichung mittels Ableitungsoperatoren

In allen vorangegangenen Kapiteln haben wir reelle und komplexwertige Wellenfunktionen ausschließlich aufsummiert bzw. integriert, quadriert, Skalarprodukte gebildet und nach t abgeleitet. Dies war realistisch, da die unendlich vielen diskret bzw. kontinuierlich gedeuteten Ortsvektoren über Indizes und Wellenfunktionen als Amplitude bzw. Frequenz kumulativ bzw. integral eingeflossen sind. Wir haben dabei unter definierten Rahmenbedingungen (Erhaltung von Symmetrien und Paritäten, Quanten bewegen sich grundsätzlich mit der Lichtgeschwindigkeit) im Zusammenhang mit 2π -Kreispotentialen sinusartige, komplexwertige Fourier-Reihen untersucht, welche auch zu den Euler'schen Polardarstellungen führten. Wir hatten also konkrete Wellenfunktionen ψ_n vorgegeben und untersucht, was man aus den unendlich vielen Linearkombinationen dieser alles an physikalischen Ergebnissen herauskitzeln kann. Das hat uns mittels der oben beschriebenen Mathematik viel Aufklärung über die Zusammenhänge dreidimensionaler Wahrscheinlichkeitsdichten und deren dazugehöriger Verteilungen, ja über die Verbindung mit der Zahlentheorie und der Planck'schen Strahlungsformel bis zu den Teilchenarten und -zuständen im hochenergetischen thermodynamischen Gleichgewicht gebracht. Und das, ohne uns um die Kinetik von Impulsen, verschiedenster dynamischer Potentiale, Entropieänderungen und auch ohne sich um die Verhältnisse dieser Aspekte untereinander sowie dieser zur Gesamtenergie der Quantensysteme zu kümmern. Ganz davon abgesehen von deren konkreten räumlichen und zeitliche Abhängigkeiten. Es ist mehr als nur bemerkenswert, dass man trotz dieses minimalen Inputs zu so fundamentalen physikalischen Erkenntnissen gekommen ist. Es muss also schon innerhalb dieser so durch uns definierten Fourier-Reihen der Generalschlüssel liegen, mit welchen man kausal nacheinander die Türen zu weiteren physikalischen Räumen aufstoßen kann.

Es verbleiben nämlich noch folgende Fragen: Welchen Impuls hat ein Quantensystem, Potentialen oder keinen Potentialen ausgesetzt, in Abhängigkeit vom Ort und der Zeit? Befinden sich die Teilchensysteme im thermodynamischen Gleichgewicht oder wie entwickeln sie sich unter welchen Prämissen dahin? Wo sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten (Orbitale) dieser Teilchen wann wie groß? Wie sind die Energien untereinander verteilt und wie entwickeln sich diese zeitlich? Wie erklären sich die diskreten Spektren zum Beispiel des Wasserstoff-



und des Heliummoleküls? Wie ist das Periodensystem der Elemente mittels der Elektronenorbitale und Quantenzustände physikalisch zu deuten? Und letztendlich: Kann man die teilweise skurrilen experimentell gesicherten Zustände und Ergebnisse gerade der Fermionen mathematisch exakt herleiten oder damit gar falsifizierbare Voraussagen machen? Hier merkt man schon, diese Fragestellungen schreien förmlich nach der Schrödinger-Gleichung und ihre relativistischen Ableger.

Wir nehmen also den Roten Faden wieder auf und gehen konzeptionell genau den gleichen Weg wie im Kapitel 1 und Folgende: Wir betrachten unendlich viele Wellenfunktionen ψ_n für Quantenteilchen in Abhängigkeit ihrer Ortsvektoren im dreidimensionalen Raum und der Zeit t , jedoch ohne diesmal diese Funktionen vorher konkret zu definieren bzw. dafür Randbedingungen zu schaffen. Kurz, es stellt sich die Frage, welchen räumlichen und zeitlichen Veränderungen eine jede Wellenfunktion ψ_n ausgesetzt ist und damit im übertragenen Sinne, welche Pfade die einzelnen Quanten nehmen. Für jede Wellenfunktion ψ_n sollte also dessen totales Differential nach der Zeit gebildet werden:

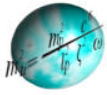
$$(10.01) \quad \frac{d\Psi_n(\vec{r},t)}{dt} = \vec{\nabla}\Psi_n(\vec{r},t)\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\Psi_n(\vec{r},t)}{\partial t}\frac{dt}{dt} \quad n \in \mathbb{N}$$

In der physikalischen Notation vereinfacht sich diese Gleichung nach Differenzieren und kürzen nach und von dt sowie durch Hinzufügen des reduzierten Planck'schen Wirkungsquantums zu folgender verallgemeinerten Energiegleichung für Wellenfunktionen ψ :

$$(10.02) \quad \hbar \dot{\Psi} = \hbar \vec{\nabla} \Psi \vec{v} + \hbar \partial_t \Psi$$

Dazu haben wir zuvor ψ_n über $k = 1$ bis n zu Ψ aufsummiert:

$$(10.03) \quad \Psi = \sum_{k=1}^n \Psi_k \quad k \in \mathbb{N}$$



Wir wenden nun folgenden Trick an und ersetzen die linke Seite der Gleichung (10.02) durch den Ausdruck $V\Psi$. Nun sieht unsere Energiegleichung folgendermaßen aus:

$$(10.04) \quad V\Psi = \hbar \vec{\nabla} \Psi \vec{v} + \hbar \partial_t \Psi \quad \hbar \dot{\Psi} = V\Psi$$

Den räumlich einmal partiell abzuleitenden Term mit dem Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ identifizieren wir als kinetische, den zeitlich einmal partiell abzuleitenden Term als energetische Komponente E . Wir stellen nun nach dem Energieterm so um, dass dieser als solcher nach dem Korrespondenzprinzip auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen bleibt:

$$(10.05) \quad -\hbar \vec{\nabla} \Psi \vec{v} + V\Psi = E\Psi \quad \hbar \partial_t \rightarrow E$$

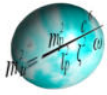
Ebenfalls nach dem Korrespondenzprinzip kann man von dem kinetischen Term den Geschwindigkeitsvektor ohne Konsistenzverlust entfernen, wenn man folgende Zuordnung und den Zusammenhang zwischen Impuls p , Nabla-Operator und der kinetischen Energie K realisiert:

$$(10.06) \quad \hbar \vec{\nabla} \rightarrow \vec{p} \quad K = \frac{p^2}{2m_0} \quad \rightarrow \quad K = \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta$$

Es entsteht so für die kinetische Komponente ein zweimal räumlich abzuleitender Term mit dem skalaren Laplace-Operator Δ , zu welchem sich im Quotienten zweimal der Wert der Ruhemasse m_0 unseres Quantenteilchensystems gesellt:

$$(10.07) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V \right) \Psi = E\Psi$$

Durch die Manipulation der Gleichung (10.02) zu (10.04) sind wir direkt zur **stationären, nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung** gelangt, indem wir über die totale Ableitung



der Wellenfunktion nach der Zeit das Potential V und ein linear kombiniertes ψ „hereinprovoziert“ haben. Was das konkret für dieses Potential bedeutet, werde ich im Schlusskapitel dieses Skriptes darlegen.

11. Spezielle Relativitätstheorie und die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

Die Aspekte der Speziellen Relativitätstheorie für die Herleitung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung lassen sich eigentlich in drei ganz einfachen Schritten und nur mit Grundschulwissen nachvollziehen, wenn man definiert, dass es eine konstante maximale Geschwindigkeit der Übertragung von Informationen, die Lichtgeschwindigkeit c , gibt:

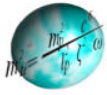
1.) Über den Satz des Pythagoras ergibt sich daraus der Lorentz-Faktor Gamma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2.) Damit berechnet sich die Zeitdilatation, die Längenkontraktion sowie der Masse- bzw. Energiezuwachs, wenn sich kompakte Körper mit einem Tempo bewegen, welches sich ab ca. 15% der Lichtgeschwindigkeit dieser immer weiter annähert. Dies gewährleistet, dass Beobachter in unterschiedlichen Inertialsystemen in ihren kausalen Betrachtungen über ein und das selbe Ereignis immer übereinstimmen.

3.) Jenes Gamma, geeignet in die Energieformel $E = m_0 c^2$ für Geschwindigkeiten viel kleiner als c eingebaut, ergibt nach einigem hin und her Albert Einstein's relativistische und damit Lorentz-invariante Energieformel: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

Ein Vergleich nach dem Korrespondenzprinzip ist hier allerdings nicht so ohne weiteres möglich, da man die quadratische Energieformel (dazu noch mit der Zusatzsumme $m_0^2 c^4$) mit der linear-quadratischen stationären Schrödinger-Gleichung (10.07) niemals übereinander bekommt. Dazu könnten wir wieder einen mathematischen Trick anwenden, indem wir postulieren, dass sich die Quanten als freie Teilchen (das Potential fällt damit weg) sowie mit ver-



schwindender Ruhemasse m_0 quasi mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Dies in die so umgestellte Formel (10.05.) eingebaut führt zu einer durchweg linearen Gleichung, welche man durchaus quadrieren kann:

$$(11.01) \quad -\hbar c \vec{\nabla} \Psi = \hbar \partial_t \Psi \rightarrow \hbar^2 c^2 \Delta \Psi^2 = \hbar^2 \partial_t^2 \Psi^2 \rightarrow \hbar^2 (c^2 \Delta - \partial_t^2) \Psi^2 = 0$$

Wenn wir die rechte Gleichung noch durch $\hbar^2 c^2$ sowie durch die Wahrscheinlichkeit ψ^2 teilen, alles auf die linke Seite bringen und wiederum auf eine Wellengleichung ψ anwenden, haben wir die aus den **Maxwell-Gleichungen** resultierende **Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht** hergeleitet:

$$(11.02) \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \psi = 0$$

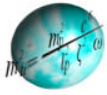
Nehmen wir nun wieder die Gleichung (11.01) sowie die durch unsere obigen Tricks und Postulate um den Masseterm gebrachte Einstein'sche Impuls-Energie-Beziehung, können wir auf folgende Vertauschungsrelation abheben:

$$(11.03) \quad \begin{aligned} -\hbar c \vec{\nabla} \Psi &= E \Psi & (i \hbar \partial_t)^2 &= (iE)^2 \rightarrow -E^2 \\ -p^2 c^2 &= -E^2 & -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta &\leftarrow \frac{p^2}{2m_0} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun über die stationäre Schrödinger-Gleichung die relativistisch modifizierte **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung**:

$$(11.04) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V \right) \Psi = i \hbar \partial_t \Psi$$

Warum nur relativistisch modifiziert? Denn schauen wir uns diese Gleichung an, müssen wir aus drei schwerwiegenden Gründen gleich wieder Wasser in den Wein schütten:

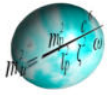


- 1.) Da wir universell auch mit Ruhemasse behaftete Teilchen involvieren wollen, ist im kinetischen Term die Teilchenmasse m_0 hineingerutscht. Gegen dieses Problem könnte man argumentieren, dass der relativistischen Masseterms $m_0^2 c^4$ bei sehr kleinen Massen sehr viel schneller verschwindet als der nichtquadrierte Term m_0 in (11.04) und dieser deshalb stehen bleiben kann. Da dieses Argument allerdings mathematisch sehr dünn ist, zählt es nicht wirklich.
- 2.) Auch das Potential V taucht wieder wie von Geisterhand in der Gleichung auf, damit man das System mit V größer Null mit von sinusartigen (stehende Wellen) bis zu $e^{-\phi}$ -artigen Wellenfunktionen (Tunneleffekt) beschreiben kann. Zumindest für die sinusartigen Wellen könnte man hier wieder das Argument bringen, dass man für deren Beschreibung mit verschwindend kleinen Potentialen gegenüber dem kinetischen Term ganz gut auskommen würde.
- 3.) Der kinetische Term wird partiell 2. Ordnung (Laplace-Operator) abgeleitet, während die zeitliche Energiekomponente nur einmal partiell abgeleitet wird. Dies beißt sich mit den Erfordernissen der Speziellen Relativitätstheorie, wo aus Gründen der Lorentz-Invarianz Raum und Zeit gleichbehandelt und damit gleichartige Ableitungen realisiert werden müssen.

Damit ist die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung nicht wirklich relativistisch, um nicht zu sagen: Falsch.

Jedoch für Teilchen mit gegenüber der Lichtgeschwindigkeit kleinen Geschwindigkeiten und sehr geringen Massen in einem Potential, als auch für quasi masselose und masselose Photonen und Bosonen als freie Teilchen im potentialfreien Feld sind sowohl die stationäre als auch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichungen hervorragend geeignet und beantworteten viele der oben aufgeworfenen Fragen hinreichend genau:

Über die negativ konnotierte zweite Ableitung nach dem Raum bei einem positiven Term auf der rechten Seite der umgestellten stationären Gleichung (10.07), dann also, wenn die Energie des Potentials kleiner ist als die Energie des Systems,



$$(11.05) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi = (E - V) \Psi \quad \leftrightarrow \quad \text{Kap. 1-9}$$

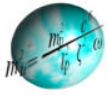
ergeben sich dazu genau die Wellenfunktionen mit ihren ganzen linearen Kombinationen unserer unendlichen sinusartigen Fourier-Reihen in der ersten Hälfte dieses Skriptes und den ganzen sich daraus ergebenden physikalischen Konsequenzen.

Wird V im Feld größer als die Systemenergie E , wird der rechte Gleichungsteil ebenfalls negativ und dies erzwingt für die Wellenfunktion die Gleichungsform $e^{-\phi}$, womit durch das Potential hindurch abklingende aber niemals auf das Energieniveau Null abfallende Funktionen entstehen (Tunneleffekt).

Bezieht man in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung Potentiale ein, ergeben sich für die stehenden Wellen und ihre ganzen Kombinationen als zeitliche Konsequenz energieabhängige Rotationen im komplexen Raum. Auch diese Fourier-Komponenten der Euler'schen Form $e^{-i\phi}$ hatten wir in den Kapiteln 1-9 ausgiebig hergeleitet und besprochen.

Darüber hinaus zeigt uns die zeitabhängige Form für freie ruhemassebehafteter Teilchen (in potentialarmen und -freien Feldern) den zeitlichen Verlauf mit dem räumlichen Zerfließen (Dispergierung) der Welle bis hin zu den Wellenfunktionen für masselose Teilchen (Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts).

Aufgrund der oben aufgeführten drei Kritikpunkte beschreiben die beiden Schrödinger-Gleichungen weder das Verhalten im gesamten relativistischen Spektrum noch die genaue Charakterisierung der Teilchen (Spin- und andere Zustände) unter den ganzen Gesichtspunkten der Erhaltung von Symmetrien und Paritäten. Welche Probleme sich auftun, worin die Schwierigkeiten für deren Lösungen liegen, warum weitere erfolversprechende Versuche scheiterten und wie man letztendlich auf gutem Wege zu einer Lösung dieser kam, versuche im folgenden Kapitel darzulegen.



12. Von Problemlösungsversuchen zu symmetrischen Matrizen

Wenn man generell Raum und Zeit gleich behandeln möchte, um zu einer Lorentz-invarianten und damit relativistischen Form einer Wellengleichung zu gelangen, die also mit der Speziellen Relativitätstheorie vereinbar ist, könnte man annehmen auch je zweimal partiell nach dem Raum und nach der Zeit mit skalaren Operatoren abzuleiten, indem man sich dazu dem Gerüst der Einstein'schen Energieformel bedient und lustig losquadratiert:

$$(12.01) \quad \begin{aligned} p^2 c^2 + m_0^2 c^4 &= E^2 & p^2 &\rightarrow -\hbar^2 \Delta \\ c^2 (-\hbar^2 \Delta + m_0^2 c^2) \psi &= -\hbar^2 \partial_t^2 \psi & E^2 &\rightarrow -\hbar^2 \partial_t^2 \psi \end{aligned}$$

Nun wird c^2 auf die rechte Seite gebracht und alle Terme durch $\hbar^2$ dividiert. Dabei erkennt man,

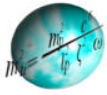
$$(12.02) \quad \left(-\Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{m_0 c}$$

dass es sich dann bei dem rechten Term in der Klammer um die quadrierte inverse reduzierte Compton-Wellenlänge λ_C handelt. Dadurch entsteht folgender Ausdruck:

$$(12.03) \quad \left(-\Delta + \frac{1}{\lambda_C^2} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \psi = 0 \quad \square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$$

$\square$ ist dabei der sogenannte D'Alembert-Wellenoperator. Spätestens dann, wenn man diesen in die Gleichung (12.03) einsetzt, erkennt man, dass wir gerade die **Gordon-Klein-Gleichung** hergeleitet haben:

$$(12.04) \quad \left(\square + \frac{1}{\lambda_C^2} \right) \psi = 0$$



Diese Gleichung setzt zwar aus oben geschilderten Erwägungen den richtigen Punkt hinsichtlich der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, nicht aber beim Spin von Teilchen. Will man nämlich mit dieser Gleichung zum Beispiel Bindungsenergien von geladenen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen wie dem Elektron oder dem Proton berechnen, ergeben sich hinsichtlich der experimentell ermittelten Werte völlig falsche Ergebnisse. Die mit skalaren Differentialen ausgestattete Gordon-Klein-Gleichung beschreibt nur spinnlose Teilchen wie zum Beispiel Pionen richtig.

Ein weiteres Problem taucht auf, wenn mit dieser Gleichung Wahrscheinlichkeiten bzw. Skalarprodukte berechnet werden sollen. Dann fliegen diese uns in der Hinsicht um die Ohren, als dass dann wegen dem Summenausdruck in der Klammer sowohl auch negative und bzw. oder komplexe Werte auftauchen als dass es auch völlig verschiedene Ergebnisse gibt, je nachdem wie man die Reihenfolge der Rechenoperationen wählt. Dies stellt ein Problem für den Vergleich zwischen den theoretischen und den immer reellen und bei Wahrscheinlichkeiten auch positiven experimentellen Messergebnissen dar.

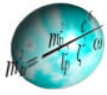
Genau dieses Problem haben wir nämlich bei der Gleichung (11.01) für die Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts stillschweigend unter den Tisch fallen lassen. Hier gibt es nämlich, je nach der gewählten Reihenfolge der Rechenschritte, diese teilweise physikalisch widersprüchlichen Lösungen über dann zwei völlig unterschiedliche Gleichungen:

$$(12.05) \quad -\hbar c \vec{\nabla} \Psi = \hbar \partial_t \Psi \quad \rightarrow \quad \hbar^2 c^2 \Delta \Psi^2 = \hbar^2 \partial_t^2 \Psi^2 \quad \rightarrow \quad \hbar^2 (c^2 \Delta - \partial_t^2) \psi = 0$$

$$(12.06) \quad 0 = \hbar c \vec{\nabla} \Psi + \hbar \partial_t \Psi \quad \rightarrow \quad 0 = \hbar^2 (c^2 \Delta + 2c \vec{\nabla} \partial_t + \partial_t^2) \psi$$

Das Vorhandensein dieses Beispiels möchte ich zum Anlass nehmen, eine anschauliche Erklärung für die Einführung eines entscheidenden mathematischen Verfahrens in der Quantenmechanik zu geben:

Während also im Ergebnis die Gleichung (12.05) bei Termen das Vorzeichen wechselt, also auf der Zahlengerade um 180° dreht, vermischt (12.06) diese untereinander. Selbst wenn man jetzt versucht pro Gleichung auf einer Seite die imaginäre Einheit $+i$ und bzw. oder $-i$ unterzubringen, ändert man an der Problematik gar nichts. Man kann es also im wahrsten Sinne des Wortes Drehen und Wenden wie man will, immer wird irgendwo das Vorzeichen gewechselt



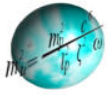
und bzw. oder irgendwo Terme gemischt. Die Ungleichungen und unauflösbaren Widersprüche fliegen uns nur so um die Ohren.

Gesucht ist also ein in sich konsistenter mathematischer Mechanismus oder auch eine Rechenvorschrift, der oder die Gleichungen der Art (12.05) in (12.06) und umgekehrt transformiert, so dass beispielweise beim Quadrieren des p-Terms (a) mit dem E-Term (b), egal in welcher Reihenfolge man die Rechenschritte ausführt, immer nur die Zweite bzw. Dritte Binomische Formel $a^2 \pm b^2$ stehen bleibt bzw. umgekehrt, ein Mischterm entsteht. Das dabei in den genannten Fällen der Mischterm $2ab$ zu Null werden muss, versteht sich von selbst. Und genau dieses Rechenwerkzeug gibt es dafür: Die **Matrizenrechnung**.

Diese oder ähnliche Gedanken werden sich wohl auch Wolfgang Pauli und andere Protagonisten, einschließlich Quantenphysiker, gemacht haben, als man versuchte die Schrödinger-Gleichungen und die Gordon-Klein-Gleichung sowohl auf die Erfordernisse der Speziellen Relativitätstheorie als auch auf die exakte Beschreibung (über das im Stern-Gerlach-Experiment gemachte Verhalten) von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen zu trimmen. Die fast richtigen Schlussfolgerungen hinsichtlich der Erhaltungssätze von Symmetrien ziehend, bediente sich Pauli dafür symmetrischer für die Lorentz-Invarianz eigentlich völlig konsistenter **4 Stück 2x2-Matrizen** (drei für die räumlichen und eine für die zeitliche Dimension), welche dankenswerterweise die Zahlentheorie schon im Fundus für ihn bereithielt: Die **Clifford-Algebra**. Mit den nach ihm benannten **Pauli-Matrizen** konnte er die oben beschriebenen Transformationen (Drehungen, Spiegelungen und sonstige Vertauschungen) im mathematischen Raum ausführen. Warum aber zog er dann **nur fast die richtigen Schlussfolgerungen**? Weil, die damit erzielten Berechnungen stimmten immer noch nicht mit den experimentellen Ergebnissen von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ überein. Also alles umsonst? Nein, denn jetzt erscheint Paul Dirac auf dem Plan! Und was ist sein Plan? Natürlich auch symmetrische Matrizen, nur eben größer!

13. Versuch einer unkonventionellen Herleitung der freien Dirac-Gleichung

Im Kapitel 9 haben wir hergeleitet, dass unsere vermuteten **Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen** genau **vier Quantenzustände** haben müssen. Jetzt tun wir so, als dass wir erkenntnistechnisch in der



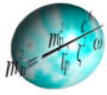
Zeit der 28-er Jahre des letzten Jahrhunderts stehen geblieben sind. Durch das Stern-Gerlach-Experiment initiiert wissen wir, dass es nur zwei quantisierte reelle Spinoren von exakt $\pm\hbar/2$ parallel zur z-Achse gibt. Soweit, so gut. Wir verlassen uns auf die Aussagen der Mathematik sowie der Physik bezüglich der Skalarprodukte und der Erhaltungssätze der Symmetrien und schlussfolgern daraus, als Rechenvorschrift für die dazu notwendigen Transformationen symmetrische **4x4-Matrizen** zu verwenden. Und zwar drei für jede Raum- und eine für die Zeitdimension. Ebenfalls mathematisch-physikalische Argumente (auch in Konsequenz der in den Vorkapiteln geschilderten Probleme, Inkonsistenten und der evidenten Abweichungen zwischen Berechnungen und experimentellen Ergebnissen) überzeugen uns, unbedingt eine **lineare**, nur je **einmal nach Raum und Zeit partiell ableitbare** Form einer **Wellengleichung** zu finden, welche beim Quadrieren durch die „Rechenhilfe Matrizen“ exakt in die quadratische Form der Einstein'schen Energie-Impuls-Gleichung übergeht. Für diese Ausgangsbedingungen ein **Grundgerüst** zu finden, welches letztendlich zum Erfolg führt, ist der genialen Idee Paul Dirac's zu verdanken. Vielleicht wären wir aber auch selbst darauf gekommen

$$(13.01) \quad E = c \sum_1^3 \alpha_n p_n + \beta m_0 c^2 \quad \alpha_n, \beta = \begin{bmatrix} \underline{n11} & n12 & n13 & n14 \\ n21 & \underline{n22} & n23 & n24 \\ n31 & n32 & \underline{n33} & n34 \\ n41 & n42 & n43 & \underline{n44} \end{bmatrix}$$

$$C = A[] + B[] \quad \leftrightarrow \quad C^2 = A^2 + 0 + B^2 \rightarrow 2AB = 0$$

eine Linearkombination über die drei Raumachsen mit dann drei 4x4-Matrizen mit dem Impulsterm und mittels einer 4x4-Matrize und dem zeitlichen bzw. Masseterm als zusätzlichen Summanden als konsistente Verbindung der Energie-Impuls-Beziehung mit einer linearen Wellenfunktion völlig logisch zu verknüpfen.

Jetzt müssen „nur“ noch die Matrizen ihre transformatorischen Rechenkünste zur Schau stellen, die Berechnungen den Praxistest bestehen und sich die neuartige Wellengleichung durch Fallannahmen in die Spezialfälle der Schrödinger- bzw. Klein-Gordon-Form zurückführen lassen. Schauen wir uns das jetzt genauer an:



$$(13.02) \quad A^2 = (cp_1|\alpha_1| + cp_2|\alpha_2| + cp_3|\alpha_3|) \cdot (cp_1|\alpha_1| + cp_2|\alpha_2| + cp_3|\alpha_3|)$$

$$(13.03) \quad A^2 = \underbrace{c^2 p_1^2 |\alpha_1|^2}_{c^2 p_2 p_1 |\alpha_2| |\alpha_1| +} + \underbrace{c^2 p_1 p_2 |\alpha_1| |\alpha_2|}_{c^2 p_2^2 |\alpha_2|^2 +} + \underbrace{c^2 p_1 p_3 |\alpha_1| |\alpha_3|}_{c^2 p_2 p_3 |\alpha_2| |\alpha_3| +} +$$

$$c^2 p_3 p_1 |\alpha_3| |\alpha_1| + c^2 p_3 p_2 |\alpha_3| |\alpha_2| + \underbrace{c^2 p_3^2 |\alpha_3|^2}$$

$$(13.04) \quad A^2 = c^2 p_{\{1,2,3\}}^2 \quad p_{\{1,2,3\}}^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

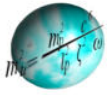
Damit der A-Term der Gleichung (13.01) der Gleichung (13.04) entspricht, müssen deshalb unsere drei räumlichen Matrizen ganz bestimmte Voraussetzungen erfüllen: Alle quadrierten gleichartigen Matrizen (die unterstrichenen Summanden) müssen den Wert 1 als Einheitsmatrize annehmen (alle Einträge auf der Hauptachse, in (13.01) unterstrichen, sind dann 1), während sich in alle anderen antikommutativen Termen die Matrizen zu Null aufheben. Nur so werden die Transformationen erzeugt, welche zur Gleichung (13.04) führen. Das bedeutet:

$$(13.05) \quad |\alpha_k|^2 = \underline{1} \quad |\alpha_i| |\alpha_j| + |\alpha_j| |\alpha_i| = 0 \quad \sum_{n=1}^3 (k) \rightarrow n = n \quad \sum_{n=1}^3 (i, j) \rightarrow n \neq n$$

Wir gehen weiter systematisch voran und knüpfen uns nun den Summanden B vor, der ebenso wie der Summand A mit sich selbst widerspruchsfrei zu B² werden muss. Das passiert natürlich nur dann, wenn das Quadrat der Beta-Matrize wieder zur Einheitsmatrize wird:

$$(13.06) \quad |\beta|^2 = \underline{1}$$

Das war einfach. Doch leider wird es jetzt richtig kompliziert, brauchen aber nicht verzweifeln, wenn wir den Roten Faden konsequent weiterspinnen. Da die relativistische Impuls-Energiebeziehung die Form C² = A² + B², unsere lineare Wellengleichung dagegen aber die Form C = A + B hat, würde beim quadrieren letzterer wegen C² = A² + 2AB + B² der Mischterm 2AB entstehen, was zur Inkonsistenz führt. Auch diesen zusätzlichen Summanden müssten diesmal sogar alle vier Matrizen (α und β) im Zusammenspiel mathematisch konsistent eliminieren.



Auf der Grundlage unserer vorhergehenden Gleichungen können wir ausmultipliziert schreiben:

$$(13.07) \quad 2AB = 0 = m_0 c^3 (p_1 |\alpha_1| |\beta| + p_1 |\beta| |\alpha_1| + p_2 |\alpha_2| |\beta| + p_2 |\beta| |\alpha_2| + p_3 |\alpha_3| |\beta| + p_3 |\beta| |\alpha_3|)$$

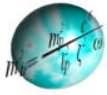
Das bedeutet für die Matrizenkombinationen:

$$(13.08) \quad |\alpha_k| |\beta| + |\beta| |\alpha_k| = 0 \quad \sum_{n=1}^3 (k) \rightarrow n = n$$

Fassen wir noch einmal alle vier Bedingungen für unsere Matrizen kompakt zusammen:

$$(13.09) \quad |\alpha_k|^2 = \underline{1} \quad |\alpha_i| |\alpha_j| + |\alpha_j| |\alpha_i| = 0 \quad |\beta|^2 = \underline{1} \quad |\alpha_k| |\beta| + |\beta| |\alpha_k| = 0$$

Wenn man über den ganzen Wust möglicher (unendlicher) Varianten von Anordnungen an Imaginär- und Realteilen ($\pm i$) und (± 1) innerhalb der vier Matrizen denkt und sich vorstellt, genau die eine bzw. mehrere möglichen Varianten für die Bedingungen in (13.09) finden zu wollen, könnte man schier verzweifeln. Wie also kann man diese unendlich vielen Möglichkeiten schon im Vorfeld einschränken? Dazu habe ich mir überlegt, dass wir je zwei gleiche verallgemeinerte 4x4-Matrizen ausmultiplizieren, sprich quadrieren. Dies in der Hoffnung, damit auf eine Systematik vorerst für die Bedingungen bezüglich α_k^2 und $\beta^2 = \underline{1}$ zu stoßen. Und vielleicht können wir ja dann über die dadurch erzielten Erkenntnissen weitere Türen zur Lösung unserer Wellengleichung aufmachen. Um nicht durcheinander zu geraten, wenden wir das Falk'sche Schema für die Matrizenmultiplikation $M_4 \times M_4 = M_{4^2}$ an:



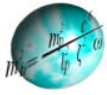
(13.10)

				11	12	13	14
				21	22	23	24
				31	32	33	34
				41	42	43	44
11	12	13	14	11x11+12x21 + 13x31+14x41	11x12+12x22 + 13x32+14x42	11x13+12x23 + 13x33+14x43	11x14+12x24 + 13x34+14x44
21	22	23	24	21x11+22x21 + 23x31+24x41	21x12+22x22 + 23x32+24x42	21x13+22x23 + 23x33+24x43	21x14+22x24 + 23x34+24x44
31	32	33	34	31x11+32x21 + 33x31+34x41	31x12+32x22 + 33x32+34x42	31x13+32x23 + 33x33+34x43	31x14+32x24 + 33x34+34x44
41	42	43	44	41x11+42x21 + 43x31+44x41	41x12+42x22 + 43x32+44x42	41x13+42x23 + 43x33+44x43	41x14+42x24 + 43x34+44x44

Die dick gerahmte Matrize M_4^2 in (13.10) ist also das Ergebnis des Quadrierens von 4×4 -Matrizen M_4 . Durch die Markierung mit verschiedenen Farben fällt sofort ins Auge, dass es **sieben** Stück **Variationen** in M_4^2 (**rot**, **blau**, **cyan**, **gelb**, **grün**, **violett**, **schwarz** bzw. **r**, **b**, **c**, **y**, **g**, **p**, **s**) für **vier Möglichkeiten eines Musters** in M_4 gibt (**rr**, **yg**, **cp**, **bs**) immer je zwei gleiche Indizes zu multiplizieren, während alle anderen Multiplikatorensommen Null sind. Damit diese beiden Indizes dann zusammen den Realteil einer Einheitsmatrize ergeben, gibt es drei Möglichkeiten von kommutativen Multiplikationen:

$$(13.11) \quad 1 \cdot 1 = 1 \quad (-1) \cdot (-1) = 1 \quad i \cdot (-i) = 1$$

Die Variationen in M_4^2 liegen samt alle auf der Hauptdiagonalen von M_4^2 . Wenn zwei Farbvariationen einschließlich rot/rot auf der Hauptachse von M_4^2 nebeneinander ohne Lücken (keine



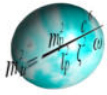
der beiden Farben fehlt an einer Stelle der Hauptdiagonalen) die gesamte Diagonale ausmachen, würde durch geeignete Wahl von (13.11) die Hauptdiagonale aus vier Einsen bestehen. Das wäre dann unsere geforderte Einheitsmatrix 1.

Im Vorgriff sei erwähnt, dass bei räumlichen 2x2-Matrizen M_2 die Spur (Trace) $tr = 0$ sein muss, was bedeutet, dass die Summe der Einträge in deren Hauptdiagonalen immer verschwindend ist. Dies trennt dann nämlich räumliche von zeitlichen Matrizen M_2 , wo die Spur $tr > 0$ sein muss. Dazu ist es bei M_2 -Matrizen auch noch strikt erforderlich, dass diese unitär-hermitisch sind. Das bedeutet, nach einer Spiegelung der Einträge an der Hauptdiagonalen müssen (nur) die imaginären Anteile dieser einem Vorzeichenwechsel unterzogen werden (komplex adjungierte Konjugation $M^\dagger$). Außerdem wird gefordert, dass die Inverse der 2x2-Matrize $M^{\dagger T}$, wieder diesem Prozedere unterzogen, die Ursprungsmatrize M_2 ergibt. Diese Manipulationen sind, ähnlich wie bei der Skalarproduktbildung, dringend erforderlich, damit reellwertige Rechenergebnisse mit den intrinsisch reellen Messergebnissen des Experimentes verglichen werden können. Also kurz gesagt, damit unsere Berechnungen auf unsere reale Welt übertragen werden können. Das alles sind nicht verhandelbare Voraussetzungen, welche sich zwangsweise aus der physikalischen Mathematik sowie der Speziellen Relativitätstheorie heraus ergeben. Da diese Bedingungen die Möglichkeiten von Varianten unserer M_4 -Matrizen erheblich einschränken werden, ist hier schon einmal kurz dem Kapitel über die Pauli-Matrizen vorgegriffen worden. Das sollte man auch deswegen machen, weil man zweifelsfrei festgestellt hat, dass unsere 4x4-Matrizen Konglomerate zweier 2x2-Matrizen sind, welche die oben genannten Rahmenbedingungen der M_2 -Matrizen ebenfalls konsistent mathematisch übernehmen.

Und letztendlich muss jetzt noch eine Definition erhalten. Doch dieser bedarf es eigentlich gar nicht, da es logisch sein sollte, dass unterschiedliche Matrizenvariationen keine Linearkombinationen untereinander sein dürfen. Für unsere Matrizen mit den Einheitseinträgen bedeutet das, dass es verboten ist, alle Indizes komplett mit irgendwelchen Konstanten κ^* zu vervielfachen und sei es nur mit $\pm i$ oder i^2 .

Fassen wir diese ganzen Voraussetzungen einmal zusammen für die Matrizen M_2

$$(13.12) \quad tr(M_2)_{x,y,z} = 0 \quad tr(M_2)_t > 0 \quad M_2^t = \overline{M_2}^T \quad \left| \kappa^* M_2 \right|_{i,j}$$



sowie für die Matrizen M_4 :

$$(13.13) \quad \text{tr}(M_4)_{2 \times (x,y,z)} = 2 \cdot 0 \quad \text{tr}(M_4)_{2 \times t} \neq 2 \cdot 0 \quad M_4^t = \overline{M_4}^T \quad \left| \kappa^* M_4 \right|_{i,j}$$

Jetzt definieren wir auch diese ganzen Voraussetzungen noch zusätzlich zu allen andern Bedingungen in unsere räumlichen und zeitlichen 4x4-Matrizen in mathematisch gängiger Notation ganz pragmatisch hinein:

$$(13.14) \quad \text{for } \langle \alpha, \sigma \rangle_n^\mu = \langle \alpha, \sigma \rangle_n \text{ and } \langle \beta, \sigma_0 \rangle^\mu = \langle \beta, \sigma_0 \rangle, \text{ the following must hold :}$$

$$\mu \equiv \text{law of : (13.09), (13.11), (13.13), } (U^t U = U U^t = I),$$

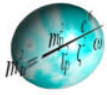
$$(S^T = S), (A^{-1} = A \rightarrow A^2 = I), (H^t = H), (\det A \neq 0)$$

Alle diese **Bedingungen** eingepreist, analysieren wir zuerst die Matrix $M = \alpha$ nach möglichen Mustern unabhängig von den drei möglichen Multiplikationen in (13.11). Das Muster b/s können wir gleich wegen dieser ganzen „ M_2 -Matrizen-Definitions-Gründe“ verwerfen und komplett auf Null setzen:

$$(13.15) \quad \alpha \neq \begin{vmatrix} 0 & b & c & y \\ b & 0 & g & p \\ c & g & 0 & s \\ y & p & s & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & |c & y| \\ 0 & 0 & |g & p| \\ |c & g| & 0 & 0 \\ |y & p| & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Da die „rote Möglichkeit“ sowieso wegen der Spurbildungsvorschrift entfällt, ergeben sich generell folgende zwei Möglichkeiten an Mustern für α :

$$(13.16) \quad \alpha_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 & |0 & y| \\ 0 & 0 & |g & 0| \\ 0 & g & |0 & 0| \\ y & 0 & |0 & 0| \end{vmatrix} \quad \alpha_q = \begin{vmatrix} 0 & 0 & |c & 0| \\ 0 & 0 & |0 & p| \\ c & 0 & |0 & 0| \\ 0 & p & |0 & 0| \end{vmatrix}$$



Bei α_p kann man nun unter Beachtung des komplex konjugierten Matrizenverfahrens mittels der Nebensymmetrieachse alle möglichen Kombinationen, einzeln und gemischt, von ± 1 und $\pm i$ realisieren, bei α_q , allerdings unter Berücksichtigung der Trace-Vorschrift, auch. Wir wollen jetzt die ganzen Möglichkeiten nicht durchspielen und belassen es dabei. Wir haben ja aus der schier unendlichen Spannweite aller möglichen Matrizenkonstellationen für α -Matrizen schon sicherlich die meisten herausgefiltert.

Betrachten wir noch die β -Matrize: Wenn wir von (13.10) beginnend bis zu dem gerade zum Abschluss gebrachten Abschnitt auf dieser Seite alles in unsere Überlegungen einfließen lassen, bringt uns das zu dem wirklich nur noch einem möglichen Muster für die Beta-Matrize:

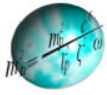
$$(13.17) \quad \beta = \left| \begin{array}{cc|cc} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{array} \right|$$

Wieviel Varianten an β jetzt durch (13.11) im Zusammenspiel mit den anderen Möglichkeiten an α -Matrizen wirklich noch übrigbleiben, wollen wir, wie auch bei den α -Matrizen, nicht durchprobieren, das wäre einfach viel zu aufwendig und damit zu stressig.

Für die exakte Festlegung der einzelnen Einträge unserer drei räumlichen α - und unserer zeitlichen β -Matrize gibt es einen viel eleganteren Weg, als jetzt mühsam ewig herum zu probieren oder einfach ein Rechenprogramm zu Hilfe zu ziehen. Das würde uns jetzt bloß die Sinne vernebeln und uns um viele weitere wichtige, vielleicht sogar die wichtigsten, Erkenntnisse und Zusammenhänge bringen.

14. Pauli-Matrizen, eine Determinante und die Minkowski-Raumzeit

Seien wir nicht bescheidener als es sein muss: Nach etwas hin und her zwischen Matrizenmultiplikation und Anforderungen durch die Mathematik sowie der relativistischen Quantenmecha-



nik bezüglich M_4 - und M_2 -Matrizen im letzten Kapitel ist es uns tatsächlich gelungen, die allgemein verbleibenden Muster dieser Matrizen für die Transformation linearer, nach Raum und Zeit einmal abzuleitender Wellenfunktionen in die quadratische Form der relativistischen Einstein'schen Energie-Impuls-Beziehung, auch ohne mathematisches Superheldentum, herzuleiten. Sehen wir uns diese noch einmal, als wieder auseinander gepflückte Matrizen M_2 , an:

$$(14.01) \quad \sigma_p = \begin{vmatrix} 0 & y \\ g & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_q = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} \quad \sigma_0 = \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} \quad \sigma_{1,2,3}^{p,q} = \alpha/2 \quad \sigma_0 = \beta/2$$

Es erscheint nicht unvernünftig, drei räumliche komplexwertige und eine zeitliche komplexwertige 2×2 -Matrize als komplexe Linearkombination Z dieser vier zu interpretieren. Mit Linearkombinationen, auch Superpositionen genannt, haben wir ja in den Kapiteln über die Fourier-Analysen und Fourier-Transformationen sehr gute Erfahrungen gemacht. Warum soll dieses Konzept hier nicht auch zum Erfolg führen? Schreiben wir die Linearkombination einmal auf:

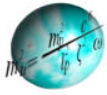
$$(14.02) \quad Z = z_0 \sigma_0 + z_1 \sigma_1 + z_2 \sigma_2 + z_3 \sigma_4$$

Die Null-Matrize können wir sofort bestimmen, da die Spur $\text{tr} > 0$ sein muss. Danach simulieren wir ein bisschen heuristisch herum. Durch Probieren, die Intuition, die Spur-Bedingungen für räumliche Matrizen sowie über die Regeln der komplex adjungierten Konjugation und die Korrespondenz mit (14.01) kommen wir dann doch noch relativ schnell zu den vermeintlich richtigen Ergebnissen:

$$(14.03) \quad Z = \begin{vmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & z_1 \\ z_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -iz_2 \\ iz_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & 0 \\ 0 & -z_3 \end{vmatrix}$$

Auf die Matrizen mit den Einheits-Realteilen ± 1 und Einheits-Imaginärteilen $\pm i$ heruntergebrochen, sehen unsere vier M_2 -Matrizen nun folgendermaßen aus:

$$(14.04) \quad \sigma_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$



Durch den Vergleich (die Festlegung der imaginären σ_2 -Dimension als y-Achse ist natürlich reine Konvention und tut nichts zur Sache) mit (14.01) stellen wir fest,

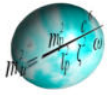
$$(14.05) \quad \sigma_p = \sigma_{1,2} \quad \sigma_q = \sigma_3 \quad \sigma_0 = \sigma_0 \quad \sigma_{1,2,3}^{p,q} = \alpha_{1,2,3} / 2 \quad \sigma_0 = \beta / 2$$

dass dies sowohl mit allen Regeln, Randbedingungen und sonstigen Voraussetzungen als auch mit unseren selbst hergeleiteten M_4 -Mustern bis ins letzte Detail hervorragend übereinstimmt. Diese **Pauli-Matrizen** auf unsere 4×4 -Matrizen, wie diskutiert überschrieben und angewendet, transformieren wirklich völlig perfekt unsere lineare Wellengleichung ohne jegliche Inkonsistenzen in die relativistische Energie-Impuls-Beziehung. Alle Matrizen erfüllen also ihre Aufgaben hervorragend. Alles funktioniert hundertprozentig. Ein Tetris-Stein passt perfekt in die Heterogenität der anderen. Wirklich? Wer sagt uns denn, dass es nicht doch noch irgendwie, irgendwo andere Möglichkeiten für die Matrizen innerhalb der durch uns festgelegten Muster bestehen? Oder noch irgendwelche Probleme oder Denkfehler lauern, auf die man niemals auch nur im Traum gekommen wäre?

Dafür gibt es die ultimative Gegenrechnung, den mathematisch-physikalischen Beweis, der alle Zweifel beseitigt: Man summiert in (14.03) auf und bildet so eine bezüglich unserer Voreinstellungen verallgemeinerte komplexe 2×2 -Matrize, ohne die vier σ -Matrizen mit ihren Einheitseinträgen als Terme zu haben

$$(14.06) \quad Z = \begin{pmatrix} (z_0 + z_3) & (z_1 - iz_2) \\ (z_1 + iz_2) & (z_0 - z_3) \end{pmatrix} \quad \text{Det}(Z) = \begin{pmatrix} 1,1 & 2,2 \\ z \cdot & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,2 & 2,1 \\ z \cdot & z \end{pmatrix}$$

und berechnet die Determinante Z . Eingefleischten Mathematik-Fans wird sowieso schon aufgefallen sein, dass bis jetzt ein ganz wichtiger Aspekt der Matrizenrechnung gefehlt hat: Eben die Berechnung der Matrizen-Determinante, durch welche man hier, und deshalb am Schluss dieses Kapitels, den mathematisch-physikalischen Beweis erbringen kann: Die Dirac-Gleichung ist die gesuchte, völlig Lorentz-invariante und damit die mit der Speziellen Relativitätstheorie vereinigte Grundgleichung, wenn sie dann „nur“ noch den Praxistest besteht. Ihre Herleitung ist somit natürlich eine der genialsten Leistungen der theoretischen Quantenphysik!



$$(14.07) \quad \text{Det}(Z) = (z_0 + z_3)(z_0 - z_3) - (z_1 - iz_2)(z_1 + iz_2)$$

Mit der 3. Binomischen Formel können wir diese Gleichung ganz einfach lösen. In der numerischen Reihenfolge umgeordnet, erhalten wir:

$$(14.08) \quad \text{Det}(Z) = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \rightarrow s^2 \quad (!)$$

Wow! Diese Determinante ist die komplexe Korrespondenz auf **das reelle invariante Raumzeitintervall s^2** für den Abstand zweier Ereignisse in der **Metrik der Minkowski-Raumzeit**. Es ist der Inbegriff einer **Lorentz-Invariante** und die Essenz des ganzen Theoriegebäudes der **Speziellen Relativitätstheorie**:

Ist $s^2 > 0$ bewegen sich Teilchen zeitartig mit Ruhemasse unterhalb der Lichtgeschwindigkeit innerhalb des Lichtkegels, weshalb Ereignisse kausal miteinander verknüpft sind.

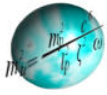
Wenn $s^2 < 0$ ist, ist der räumliche Abstand gegenüber dem zeitlichen in der Vorhand. Ereignisse finden außerhalb des Lichtkegels statt. Eine **kausale** Verknüpfung ihrer gegenseitigen Vergangenheit und Zukunft ist unmöglich.

Ist $s^2 = 0$, bilden sich die **Ereignisse** exakt auf dem Lichtkegel ab, da sie durch die **Lichtgeschwindigkeit** verbunden sind. Auf dessen Oberfläche bewegen sich deshalb die Photonen.

$$(14.09) \quad s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta(x^2 + y^2 + z^2)$$

Den experimentellen Praxistest hat die Dirac-Gleichung in knapp 100 Jahren hervorragend bestanden. Damit wurden ganze Bibliotheken und elektronische Speichersysteme vollgeschrieben. Nobelpreise verliehen. Die Elektrotechnik und Elektronik entwickelt. Rundfunk und Fernsehen. Weltraumforschung. Röntgentechnik, MRT. Computer und moderne Nachrichtenübertragung. Elektronische Medien und Kommunikation. Das Handy und das Internet. Die Künstliche Intelligenz. Bald Quantencomputer und noch vieles mehr!

Und wir haben eine der dafür eminent wichtigsten Grundgleichungen auf ganz unkonventionelle Art und Weise hergeleitet (und letztendlich einen mathematischen Beweis über die Matrizenrechnung und eine Gegenrechnung erbracht), die uns zur fundamentalsten Gleichung der Minkowski-Metrik mit ihrem invarianten Intervall s^2 geleitet hat. Was für eine mathematisch



schöne Verknüpfung von Quantenphysik und Spezieller Relativitätstheorie! Nicht schlecht!
Einfach nur: Wow!

15. Die freie Dirac-Gleichung: Interpretationen, Bestätigungen und eine Vorhersage

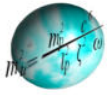
Diesen Erfolg dürfen wir jetzt erst einmal genießen, indem wir unsere Wellengleichung in ihrer ganzen Schönheit, über das Korrespondenzprinzip mittels Operatoren auf eine Wellenfunktion versehen und etwas umgeformt, aufschreiben. Weiterhin versetzen wir uns wissenstechnisch wieder in die Zeit von vor hundert Jahren zurück:

$$(15.01) \quad \left(c \sum_1^3 \alpha_n \hbar \vec{\nabla} - i \hbar \partial_t + \beta m_0 c^2 \right) \Psi_4 = 0 \quad \alpha_n = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_n \\ \sigma_n & 0 \end{vmatrix} \quad \beta = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{vmatrix}$$

Der Index bei Ψ_4 bedeutet, dass die Wellenfunktion ein vierkomponentiger Vektor der Einheitslänge 4 ist, und damit unseren vier hergeleiteten Quantenzuständen und benötigten Matrizen Rechnung trägt.

Sehen wir uns die Vierermatrize β an, bleibt uns kurz das Herz stehen: Denn die an der Nebendiagonale gespiegelten Einträge müssen im Gegensatz zu der entsprechend intuitiv zu verdoppelten Pauli-Matrize negativ sein (was natürlich matrizenmathematisch immer noch völlig korrekt ist), damit wie im Vorkapitel dargelegt, alles mit der Gleichungstransformation hin- und hergeht. Entschuldigung, da hatte ich ein vermeintlich auftauchendes Problem unterschlagen. Aber wir vertrauen der Mathematik als einen Wink mit dem Zaunpfahl. Für die detektivische Untersuchung dieses Malheurs werden wir uns auch gleich an den quantenmechanischen Tatort begeben.

Vorher legen wir uns die Gleichung (15.01) etwas für die kommenden Herleitungen zurecht und entschlacken sie, indem wir den Energieterm samt Wellenfunktion auf die linke Seite bringen, den Impulsvektor wiedereinführen und auch das Indizes von der Wellenfunktion weglassen:



$$(15.02) \quad i \hbar \partial_t \Psi = \left(c \sum_1^3 \alpha_n \vec{p}_{(1,2,3)} + \beta m_0 c^2 \right) \Psi \quad \alpha_n = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_n \\ \sigma_n & 0 \end{vmatrix} \quad \beta = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{vmatrix}$$

Dann entkoppeln wir das β vom Ruhemasseterm, dadurch, dass wir alle Terme der Gleichung mit der Inverse β^{-1} durchmultiplizieren. Dazu müssen wir die Rechenvorschriften für die Umwandlung von Matrizen in ihre Inversen anwenden. Da die β -Matrize ein Spezialfall darstellt, in dem Sinne, dass links und rechts von der Hauptdiagonalen nur Nulleinträge sind, vereinfacht sich die Sache auf folgendes Prozedere einer dann überhaupt nicht mehr so komplizierten Rechenvorschrift RV unter Hinzunahme der Einheitsmatrize (**I**):

$$(15.03) \quad \beta^{-1} = \begin{pmatrix} (+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \\ (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \beta \equiv \gamma^0$$

$$\beta^{-1} = \mathbf{RV} \cdot \mathbf{I} \quad \beta \quad \mathbf{I} = \mathbf{I} \quad \beta = \gamma^0$$

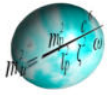
Das so errechnete Gamma γ^0 setzen wir in die Gleichung (15.02) ein, korrespondieren den Impulsterm wieder zu einem Nabla-Operator-Term und stellen etwas um:

$$(15.04) \quad \left(i \gamma^0 \hbar \partial_t + c \sum_1^3 \gamma^0 \alpha_n \hbar \vec{\nabla} - m_0 c^2 \right) \Psi = 0 \quad \vec{p}_{(1,2,3)} = -i \hbar \vec{\nabla}$$

Dadurch haben wir den Ruhemasseterm erfolgreich von β entkoppelt. Wir müssen nur noch beachten, dass durch das Einwirken von γ^0 auf die räumlichen Matrizen α_n das Vorzeichen des Impulsterms wechselt und γ^0 dadurch wieder verschwindet:

$$(15.05) \quad \left(i \gamma^0 \hbar \partial_t - c \sum_1^3 \alpha_n \hbar \vec{\nabla} - m_0 c^2 \right) \Psi = (\mathcal{E} - m_0 c^2) \Psi$$

Da jetzt die zeitliche Matrize γ^0 nur noch auf den Energieterm wirkt und die räumlichen Matrizen α_n nur noch auf den Impulsterm wirken, genauso wie es eben sein muss, können wir deshalb unseren neuen Operator $\mathcal{E}$ einführen.



Damit steht sie nun da: Unsere **verallgemeinerte Lorentz-invariante Wellengleichung freier Teilchen**. In ihrer schnörkellosen, perfekten Aufmachung, die Konstanten $\hbar$ und c^2 zu einer Eins glattgebügelt: In absolut vollendeter Schönheit!

$$(15.06) \quad (\mathfrak{D} - m) \Psi = 0$$

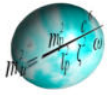
Ach, ja: Da war ja noch was mit den mathematisch erzwungenen negativen Einträgen in der β -Matrize. Ein viel zu kurzes Bein vielleicht oder falsch herum nach oben gewachsen, was man so unter ihrem schwarzen Abendkleid nicht sieht? Irgendjemand scheint uns unsere Schöne nicht zu gönnen und uns immer wieder in die Suppe zu spucken?

Da die Mathematik aber das perfekte sachlich und neutrale Schiedsgericht ist, eben auch was Emotionen und eifersüchtige Neider betrifft, nehmen wir dessen Urteil als einen ernstzunehmenden Hinweis, auf einen immer noch fehlenden Tetris-Stein in der uns umgebenden Physik von Spin- $\frac{1}{2}$ -Quantenteilchen. Dazu machen wir uns die Mühe, (15.06) nach den vier Quantenzuständen ψ aufzudröseln und γ^0 dem energetischen Term unseres $\mathfrak{D}$ -Operators auszuliefern:

$$(15.07) \quad \begin{vmatrix} \vec{\Psi}_1 \\ \vec{\Psi}_2 \\ \vec{\Psi}_3 \\ \vec{\Psi}_4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \uparrow \psi^I \\ \downarrow \psi^I \\ \uparrow \psi^S \\ \downarrow \psi^S \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ E \\ E \\ E \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} +E \\ +E \\ -E \\ -E \end{vmatrix} \quad (!)$$

Auch hier sind wieder die hochgestellten Indizes der Quantenzustände I und s völlig willkürlich (Vorsicht Ironie!) gewählt. Die beiden Spin-Zustände sind uns ja seit 1922 durch die Stern-Gerlach-Experimente bekannt. Was uns Kopfzerbrechen bereitet sind die negativen Energiezustände, welche in der klassischen Physik so nicht vorkommen. Über welche Interpretationen wäre unsere Wellengleichungs-Theorie zu retten? Welche Tetris-Steine fehlen immer noch für die Abbildung unserer realen Welt?

Dirac's Interpretation war ein universell vorhandener See, welcher mit Elektronen gefüllt ist. Wenn ein Elektron nun eine Energie aufnimmt, die seiner eigenen entspricht, entsteht so ein

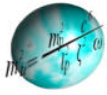


positives Loch im See, welches quasi einem negativen Elektron und damit der beiden zusätzlichen Quantenzustände entsprechen würde. Dies wäre eine ähnliche Situation wie das zeitliche Entstehen und Vergehen positiver Löcher in dotierten Halbleitermaterialien, was ebenfalls wie die Bewegung eines positiven Elektrons wahrzunehmen ist. Auf welche Interpretationsmöglichkeit wären wir mit seinem Wissensstand von damals gekommen? Wenn überhaupt auch nur auf die Geschichte des omnipräsenten Elektronen-Sees? Aber wie er, hätten wir uns unser Theoriegebäude sicherlich auch nicht kaputt machen lassen, hätten der Mathematik vertraut und behauptet, dass das irgendwie einfach so sein muss: Das es quasi, durch welche Zusammenhänge auch immer, positive Elektronen gibt. Punkt! Eine **falsifizierbare Vorhersage**. Dass vier Jahre später 1932 C. D. Anderson das **Positron** experimentell nachwies (Nobelpreis 1936), dafür hätte Dirac prompt den Nobelpreis bekommen müssen. Den bekam er auch zusammen mit Erwin Schrödinger. Dirac aber nicht für die Vorhersage des Positrons, sondern beide offiziell für die durch sie hergeleiteten Wellengleichungen. Man hätte sonst Dirac in kurzer Folge zwei Nobelpreise überreichen müssen, und das ging dem Nobelpreis-Komitee in Oslo dann doch zu weit.

Dass jedes Fermion ein entsprechendes Antiteilchen hat, wissen wir heute und ist experimentell unzählige Male bewiesen worden. Dirac's Vorhersage hat sich damit eindrucksvoll, und nicht nur für das Elektron, bestätigt. Mehr noch, das Vorhandensein von Antiteilchen lässt sich formal mit der Zeitumkehrsymmetrie in Verbindung bringen und steht damit im weiteren Sinne in Zusammenhang mit einer modernen Erweiterung des Symmetriegedankens, den die Mathematikerin Emmy Noether mit ihren 1918 veröffentlichten, später nach ihr benannten Theoremen mathematisch begründete. Man kann nämlich Antiteilchen völlig widerspruchsfrei als bewegte Materiequanten entgegen der Zeitachse interpretieren, die sich dann logischerweise in der Zeit vorwärts als Antiteilchen bewegen.

Doch was haben die Indizes l (large für groß) und s (small für klein) zu bedeuten? Man dachte doch, dass sich diese beiden Zustände mit dem Nachweis der Antiteilchen als eben diese Zustände erledigt hätten? Diese Frage zu klären wäre nun noch das wirklich letzte verbliebene Puzzle-Teil, was zur absolut perfekten Schönheit der Dirac-Gleichung fehlen würde.

Man könnte jetzt noch einwenden, da wäre zum Beispiel noch die Sache mit der Abweichung des gyromagnetischen Faktors G von theoretisch, nach Dirac's Gleichung berechneten, durch



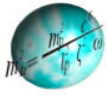
den Elektronenspin induzierten magnetischen Moment, von exakt minus Zwei (gemessen mit $G = -2,00231930436\dots$): Der sogenannte anomale magnetische Moment. Das hat aber nichts mit der Dirac-Gleichung an sich zu tun und ist heute mit der Störungstheorie bezüglich Wechselwirkungsmechanismen im Quantenvakuum mit einer Genauigkeit von elf Stellen hinter dem Komma im Vergleich zu den experimentellen Daten genau zu berechnen. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass die mit wachsenden Potenzen fallenden Summenkorrekturterme die Feinstrukturkonstante enthalten und im zweiten Korrekturterm die uns aus den Kapiteln 7 bis 9 so wohlbekannte Zetakonstante $\xi(3)$ anlächelt. Aber das nur so nebenbei.

Was also bedeuten nun die Indizes l und s ? Diese erklären die unterschiedlichen „Stärkeverteilungen“ der beiden Zustände im relativistischen Gesamtspektrum. Bei gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sehr geringen Teilchengeschwindigkeiten, entsprechend relativ niedrigen mittleren Bewegungsenergien bzw. Temperaturen, mit welchen wir es meistens in unserem Alltag zu tun haben und bei geringen Potentialwirkungen, ist der l -Anteil maximal. Also annähernd 1, gegenüber dem s -Anteil mit fast 0. Bei der Lichtgeschwindigkeit entsprechend nahekommenden Energien, wie zum Beispiel Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von Elektronen sehr nahe an Atomkernen, nähern sich diese „Stärken“ immer weiter an, bis ihre „gemischten Verteilungen“ theoretisch gleich große skalare Beträge haben. Diese Erklärungen wurden durch Experimente über Energie- und Wahrscheinlichkeitsauswertungen exakt bestätigt.

Damit erklärt sich irgendwie auch, warum in hochenergetischen fermionischen Systemen hin zum thermodynamischen Gleichgewicht nachweislich (Materie-Antimaterie-Kaskaden in den Cern-Experimenten bei hochenergetischen Zusammenstößen) Materie und Antimaterie förmlich im Gleichgewicht vorliegen.

Und damit erklärt sich auch mehr oder weniger subtil, warum bei niedrigen Energien unsere, in unserer Welt nun mal vorherrschenden, Materieteilchen mehr oder weniger „unter sich“ bleiben.

Das bestätigt sich deshalb auch rechentechnisch, weil wir die Formeln der Linearkombinationen, also unsere konkreten Wellenfunktionen ψ_4 in die Energie- und Zeitmatrizen β integrieren können. Denn wenn im large-Zustand die Energien sinken, vergrößern sich dort die Anteile gegenüber dem s -Zustand. Wenn dagegen im small-Zustand die Energien sinken, verkleinern sich dort die Anteile gegenüber dem l -Zustand. Wenn aber die Energien steigen, verringern



sich im large-Zustand die Anteile gegenüber dem s-Zustand, während sich die small-Anteile gegenüber dem l-Zustand vergrößern. Damit sind auch hier unsere Schlussfolgerungen mathematisch konsistent, noch dazu, weil die konkreten experimentellen Messergebnisse mit den konkreten Berechnungen über die Dirac-Gleichung effektiv übereinstimmen.

$$(15.08) \quad \begin{vmatrix} \uparrow \psi^{\bar{l}} \\ \downarrow \psi^{\bar{l}} \\ \uparrow \psi^{\bar{s}} \\ \downarrow \psi^{\bar{s}} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} e^{-i\frac{Et}{\hbar}} & & & \\ & e^{-i\frac{Et}{\hbar}} & & \\ & & e^{+i\frac{Et}{\hbar}} & \\ & & & e^{+i\frac{Et}{\hbar}} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} E \vee E \wedge \rightarrow e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \wedge e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \vee \\ E \vee E \wedge \rightarrow e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \wedge e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \vee \\ E \vee E \wedge \rightarrow e^{+i\frac{Et}{\hbar}} \vee e^{+i\frac{Et}{\hbar}} \wedge \\ E \vee E \wedge \rightarrow e^{+i\frac{Et}{\hbar}} \vee e^{+i\frac{Et}{\hbar}} \wedge \end{vmatrix}$$

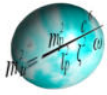
Damit wäre jetzt auch der letzte Zweifel zerstreut und wir können uns an das Schlusskapitel heranmachen. ■

Aber halt: Was passiert, wenn wir unser eigens gestaltetes Potential V mit in die Dirac-Gleichung integrieren? Wir haben ja die freie Dirac-Gleichung für Teilchen ohne die üblichen Potentiale geschweige denn unserem V hergeleitet.

Dazu das nächste Kapitel, denn ich hatte ja sowohl versprochen den thermodynamisch modellierenden Term ϵ der Planck'schen Strahlungsformel herzuleiten als auch den Trick mit der Gleichsetzung von $\hbar \dot{\Psi} = V \Psi$ aufzuklären.

Aber beenden wir dieses Kapitel nicht, bevor wir nicht noch einmal die **freie Dirac-Gleichung** aufgeschrieben und darauf hingewiesen haben, was Dirac und die anderen beteiligten Frauen und Männer schon vor ca. hundert Jahren mit den damaligen Mitteln an außerordentlichen wissenschaftstheoretischen Höchstleistungen erbracht haben!

$$(\not{\partial} - m) \Psi = 0$$



16. Wellenfunktionen für alle Fälle

Beginnen wir dieses Kapitel damit, dass wir uns die **totale Ableitung nach der Zeit einer je einzelnen Wellenfunktion** (10.01) in Erinnerung rufen, um damit das Bewegungsprofil eines auf einem diskreten Energieniveau liegenden Quantenteilchens zu beschreiben:

$$(16.01) \quad \hbar \dot{\Psi}_n = \hbar \vec{\nabla} \Psi_n \vec{v} + \hbar \partial_t \Psi_n \quad n \in \mathbb{N}$$

Den Nabla-Term identifizieren wir wieder mit der kinetischen, den partiellen Ableitungsterm nach der Zeit mit der energetischen Komponente, den Ausdruck $\hbar \dot{\Psi}$ ignorieren wir zwar vorerst, rechnen aber damit normal weiter. Jetzt betrachten wir die drei Fälle, wo immer eines der drei Terme in (16.01) verschwindet.

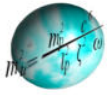
1. Fall:

$$E_n \equiv \hbar \partial_t \Psi_n = 0$$

Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$(16.02) \quad \hbar \dot{\Psi}_n = \hbar \partial_\phi \dot{\phi} \Psi_n \quad \vec{\nabla} \rightarrow \partial_\phi \quad \phi \dots \text{Winkelelement}$$

Da es sich bei den folgenden Betrachtungen immer nur um einen bestimmten diskreten Teil n von unendlich vielen Wellenfunktionen ψ_n handelt, opfern wir den Nabla-Operator für ∂_ϕ , weil die drei Raumachsen x , y und z nun durch das Winkelelement ϕ ersetzt werden. Deshalb multipliziert der Geschwindigkeitsvektor v auch zur Winkelgeschwindigkeit und damit letztendlich zur jeweils konstanten Frequenz ϑ_n , welcher nun auch gleichzeitig die diskrete Energie eines jeden Niveaus n und damit einer diskreten Frequenz und damit Wellenlänge $E_n = \hbar \vartheta_n$ bestimmt. Das erinnert jetzt stark an das 1. Kapitel über die Randbedingungen und deren Konsequenzen für sinusartige Wellen vor der Betrachtung der Linearkombinationen. Ob Zufall oder nicht, auf jeden Fall können wir nun jede unserer gemachten Ergebnisse mit den Aussagen der Kapitel 1



bis 9 eins zu eins vergleichen. Wir schreiben diese für diskrete Wellengleichungen heruntergebrochenen Bedingungen in die obige Gleichung hinein, kürzen das $\hbar$ und verwenden wieder die rein mathematische Schreibweise für Differentialoperatoren:

$$(16.03) \quad \frac{d\Psi_n}{dt} = n \frac{\partial \Psi_n}{\partial \phi} \quad \dot{\phi} = \mathcal{G}_n \equiv n$$

Nun überlegen wir, welche Wellengleichungen ψ_n nach t abgeleitet genau dem rechten Term entsprechen. Das erledigen $e^{\pm nt} = e^{\pm \phi}$ sehr gut.

$$(16.04.1) \quad \Psi_n = e^{nt} = e^{\phi} \rightarrow \frac{d}{dt} e^{nt} = ne^{nt} = ne^{\phi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} n e^{\phi} = ne^{\phi} = ne^{nt}$$

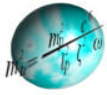
$$(16.04.2) \quad \Psi_n = e^{-nt} = e^{-\phi} \rightarrow \frac{d}{dt} e^{-nt} = -ne^{-nt} = -ne^{-\phi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} n e^{-\phi} = -ne^{-\phi} = -ne^{-nt}$$

Ja, dass passt schon mal. Also wären die zwei Formen der Wellenfunktion für diesen Fall schon geklärt. Jetzt bilden wir die Linearkombination aus unendlich vielen dieser diskret veranschlagten Wellenfunktionen ψ_n , indem wir diese über $n = 1$ bis Unendlich aufsummieren und das sowohl für die positive als auch für die negative Potenz in e^x .

$$(16.05.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{nt} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{kn} e^{k \cdot t} = \frac{e^t}{1 - e^t}$$

$$(16.05.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{kn} e^{-k \cdot t} = \frac{1}{e^t - 1}$$

Man erkennt, dass hier der Laufindex n in der Summe auf k wechselt. Das sogenannte Kronecker-Delta δ_{kn} ist hier nichts anderes als ein Operator, welcher zwischen 0 und 1 entscheidet, ob es Sinn macht, über die weitere mathematische Verwendung der erhaltenen Funktion, in diesem Fall $e^{\pm kt}$, überhaupt weiter nachzudenken. Das sich „weitere Gedanken machen“ ist dann gegeben, wenn $\delta_{kn} = 1$ ist. Bei 0 kann man sich das dann ersparen, da die Summe dann verschwindet. Das Kronecker-Delta switcht auf 1 wenn die Indizes n und k gleich sind und auf 0, wenn diese ungleich sind. Dieser eingebaute Entscheidungsfinder ist in der Regel bei periodischen Funktionen viel radikaler: Hier bedeutet die 1, dass sich die Funktion



beim Überlagern mit sich selbst auf jeden Fall mehr oder weniger beeinflussen, also mathematisch interagieren. Die 0 hingegen bedeutet, dass sie sich dann orthogonal zu sich selbst verhalten und diese dann voneinander völlig unabhängig sind. In unserem Falle einer nichtperiodischen reellen e-Funktion muss man fest davon ausgehen, dass die Laufindizes gleich sind, insbesondere, wenn man sich die Frage stellt, ob es überhaupt realistisch sein kann, dass sich Funktionen wie (16.05) orthogonal zueinander verhalten können. Unsere gesuchten zwei möglichen kumulierten Wellenfunktion ψ sind also:

$$(16.06.1) \quad \Psi = \frac{e^t}{1-e^t} \quad \text{bei:} \quad \hbar \dot{\Psi} \equiv V = K$$

$$(16.06.2) \quad \Psi = \frac{1}{e^t - 1} \quad \text{bei:} \quad \hbar \dot{\Psi} \equiv V = K$$

Die Form (16.06.2) einer abklingenden e-Funktion ist exakt der **moderierende ϵ -Term**, welcher als Multiplikator aus einer spektralen Energiedichte $u(\vartheta)$ im Kapitel 7 erst eine Energiedichteverteilung gemacht hat. Wir erinnern uns noch: Diesen Term wollte ich nicht nur aus der **Planck'schen Strahlungsformel** stibitzen, sondern auch davon unabhängig **mathematisch herleiten**. Versprechen gehalten!

Übrigens: Die obere Formulierung (16.06.1) wird auch als „**Bose-Einstein-Verteilungsfunktion** für die mittlere Zahl von **Bosonen** in einem Zustand“ gehandelt.

Und noch eine sehr wichtige weitere Botschaft vermitteln diese beiden einmal aufstrebenden und einmal abklingenden e-Funktionen: Wenn es nämlich **Potentialschwellen** im Feld gibt, welche an diesen Barrieren energetisch denen des Gesamtsystems überlegen sind, dann fallen (wenn aus Richtung eines niedrigeren Potential kommend) oder steigen (wenn aus Richtung eines höheren Potential kommend) dort mehr oder weniger abrupt die Wahrscheinlichkeiten der Wellenfunktionen: Je nach dem aus welcher Richtung, indem eine sinusartige Wellenfunktion (siehe der nächste, 2. Fall) in eine abklingende oder aufsteigende e-Funktion übergeht bzw. umgekehrt. Und genau dies ist dann der berühmte **Tunneleffekt**.

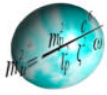
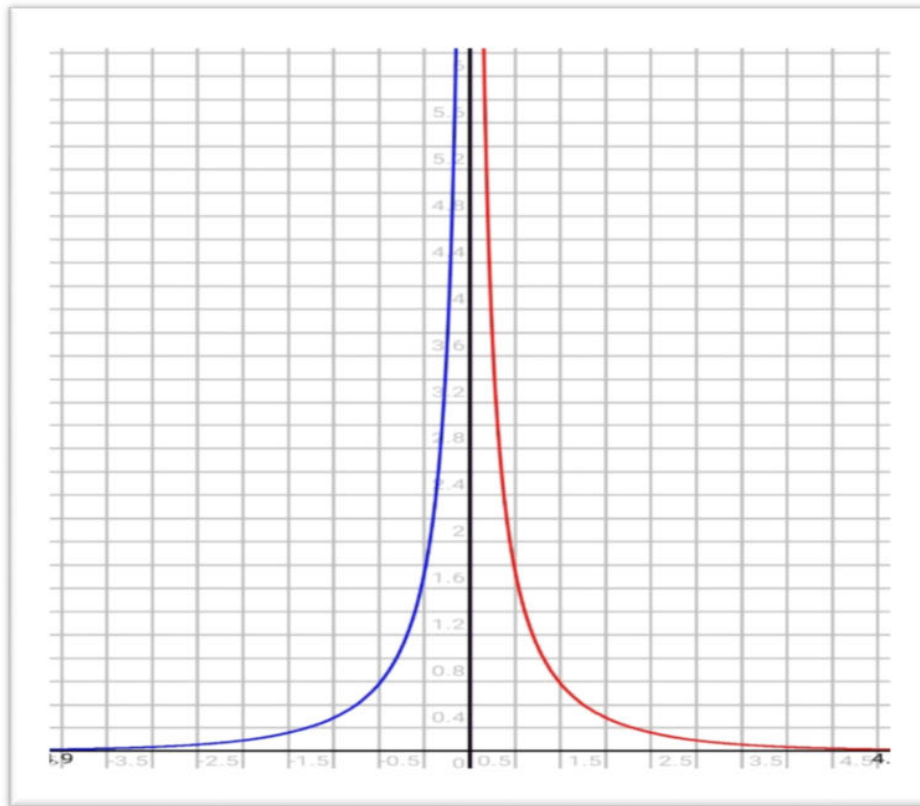


Bild 16/1: Aufstrebende (16.06.1) und abklingende (16.06.2) e-Funktionen



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

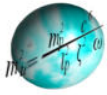
2. Fall:

$$V \equiv \hbar \dot{\Psi}_n = 0$$

Es ergibt sich folgende Gleichung.

$$(16.06) \quad \hbar \partial_t \Psi_n = -\hbar \partial_\phi n \Psi_n \quad \vec{\nabla} \rightarrow \partial_\phi \quad \phi \dots \text{Winkelelement}$$

Dieser Fall ist zwar ähnlich gelagert wie der Erste nur, dass jetzt der rechte Term negativ ist. Da eine e-Funktion auch in diesem Falle die Vorzeichen links und rechts vom Gleichheitszeichen gleich lässt, funktioniert die Sache damit nicht. Eine durch gleichartige Differentiationen realisierte Vorzeichenvertauschung funktioniert ausschließlich mit der Sinus- oder der Cosinusfunktion. Allerdings nur mit der 2. Ableitung:



$$(16.07) \quad \Psi_n = \sin(nt) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} \pm \sin(nt) = \mp n^2 \sin(nt) \\ \rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \pm n^2 \sin(\phi) = \mp n^2 \sin \phi = \mp n^2 \sin(nt)$$

$$(16.08) \quad \Psi_n = \cos(nt) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} \pm \cos(nt) = \mp n^2 \cos(nt) \\ \rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \pm n^2 \sin(\phi) = \mp n^2 \cos \phi = \mp n^2 \cos(nt)$$

Das **gemeinsame aufsummieren** von Cosinus- und Sinusfunktionen über eine unendliche Reihe ergeben vier unterschiedliche Zustände **ψ** mit charakteristischen **Cotangensfunktionen**:

$$\text{c (16.09.1)} \quad \psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [+ \cos(nt) + \sin(nt)] = \pm 0 + \frac{1}{2} \cot\left(\frac{t}{2}\right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}(t - 2k\pi)$$

$$\text{c (16.09.2)} \quad \psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} [- \cos(nt) - \sin(nt)] = + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot\left(\frac{t}{2}\right) - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}(t - 2k\pi)$$

$$\text{c (16.09.3)} \quad \psi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} [+ \cos(nt) - \sin(nt)] = - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot\left(\frac{t}{2}\right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}(t - 2k\pi)$$

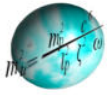
$$\text{c (16.09.4)} \quad \psi_4 = \sum_{n=1}^{\infty} [- \cos(nt) + \sin(nt)] = + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot\left(\frac{t}{2}\right) - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}(t - 2k\pi)$$

$$(16.09) \quad \text{für alle:} \quad t \neq 2k\pi \quad k \in G \quad \bar{\Psi} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$$

Ebenso kann man **getrennt** von Cosinus- und Sinusfunktionen **variieren**. Im **Cosinusfall** entstehen konstante, also **Rechteckfunktionen** RF und im **Sinusfall** entwickeln sich ebenso wie oben ebenfalls **Cotangensfunktionen**:

$$(16.10.1) \quad \psi_{\cos} = \sum_{n=1}^{\infty} + \cos(nt) = - \frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}(t - 2\pi k) \quad t \neq 2\pi k \quad R\text{-Funktion}$$

$$(16.10.2) \quad \psi_{-\cos} = \sum_{n=1}^{\infty} - \cos(nt) = + \frac{1}{2} - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}(t - 2\pi k) \quad t \neq 2\pi k \quad R\text{-Funktion}$$



$$\text{g}(16.10.3) \quad \psi_{\sin} = \sum_{n=1}^{\infty} + \sin(nt) = PV \left[+ \frac{1}{2} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \right] \quad t \neq 2\pi k$$

$$\text{g}(16.10.4) \quad \psi_{-\sin} = \sum_{n=1}^{\infty} - \sin(nt) = PV \left[- \frac{1}{2} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \right] \quad t \neq 2\pi k$$

PV... „Cauchy-Hauptwert“ (Principal Value) ist eine mathematische Lösungsvorschrift zur Vermeidung von Inkonsistenten aufgrund des plötzlichen Hochschnellens der Grafen sowohl zu $-\infty$ als auch zu $+\infty$. Weil die beiden Grafen links genauso steil hoch schnellen wie rechts, können sich die beiden Unendlichkeiten genau auslöschen. Dies gewährleistet die PV-Vorschrift.

Wenn man die einzelnen **Ausgangssummen** der Form (16.10) mit dem **Reziproken von n** **multipliziert** entwickelt sich im **Cosinusfall** eine **Logarithmusfunktion mit innerem Sinus-term**, im **Sinusfall**, die in Mathematikvorlesungen oft als Beispiel der Fourier-Transformation malträtirte **Sägezahnkurve** SZK, sowie im Falle der **Vermischung** (hier nur eine von vier Möglichkeiten dargestellt) eine **Strichrechnung beider**:

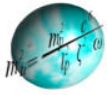
$$\text{p}(16.11.1) \quad \psi_{\cos} = \sum \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln \left| 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right| \quad \text{Polstellen: } t = 2\pi k$$

$$\text{o}(16.11.2) \quad \psi_{\sin} = \sum \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2} \quad \text{SZK} \quad \text{Sprungstellen: } t = 2\pi k$$

$$(16.11.3) \quad \psi_{\cos+\sin} = \sum \frac{\cos(nt) + \sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2} - \ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) \quad \text{p/o}$$

Die Gleichungen (16.09), (16.10) und (16.11) sowie einigen Erläuterungen wurden mit Hilfe von KI realisiert (Google und ChatGPT).

Man kann die Wellenfunktion ψ hier auch ohne das Verfahren über die Ableitungen bestimmen. Vielleicht erinnern wir uns noch, dass wir den Energieterm ja wegen der Anforderungen der Speziellen Relativitätstheorie modifizieren mussten. Dies eingepreist und gleichzeitig den kinetischen Term über das Korrespondenzprinzip in die impulsdominierte kinetische Energie zurück transformiert, geht die Gleichung (16.06), siehe dazu Kapitel 10., über in:



$$(16.12) \quad i \hbar \partial_t \Psi(\vec{r}, t) = \frac{p^2}{2m_0} \Psi(\vec{r}, t) \quad - \dot{\phi} \hbar \partial_\phi \rightarrow \frac{p_2}{2m_0} \quad \sum_{k=1}^n \Psi_n(\phi, t) \rightarrow \Psi(\vec{r}, t)$$

Da jetzt sowohl der Zusatzterm Geschwindigkeit (in den diskreten Formen die Winkelgeschwindigkeit bzw. $\dot{\phi}$) als auch der Differentialoperator wegfällt, ist im kinetischen Term die Energie nur noch vom Impuls sowie die Wellenfunktion nur noch von der räumlichen Komponente (Vektor $\vec{r}$) abhängig. Man kann also die zeitliche bzw. energetische Komponente einer mathematischen Entwicklung um den Ausgangspunkt $t = 0$ herum unterziehen,

$$(16.13) \quad i \hbar \partial_t \Psi(\vec{r}, t) = K \Psi(\vec{r}, t) \quad K = E \quad \partial_t = \frac{E}{i \hbar}$$

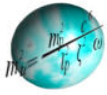
indem wir alle n -fachen Entwicklungsterme unendlich aufsummieren, um so eine zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ψ unter Einbeziehung auch der räumlichen Komponente zu erhalten:

$$(16.14) \quad \begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \Psi(\vec{r}, 0) + \partial_t \Psi(\vec{r}, 0)t + \frac{1}{2} \partial_t^2 \Psi(\vec{r}, 0)t^2 + \frac{1}{6} \partial_t^3 \Psi(\vec{r}, 0)t^3 \dots \\ \Psi(\vec{r}, t) &= \Psi(\vec{r}, 0) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_t^n t^n \right] \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wir ersetzen nun den zeitlichen Ableitungsterm ∂_t^n gemäß (16.13) und bekommen folgendes, etwas umgestelltes, Ergebnis:

$$(16.15) \quad \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, 0) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i E t}{\hbar} \right)^n \right] \quad n \in \mathbb{N}$$

Man erkennt, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer genau der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion e^x entspricht. Auf unseren konkreten Fall angewandt, heißt dies für die vom räumlichen und zeitlichen Kontext abhängige konkrete Wellenfunktion ψ folgendes: Und, man



kann diese Gleichung durchaus als den verallgemeinerten Ausdruck von **Linearkombinationen bezüglich energetischer Komponenten von sinusartigen Wellenfunktionen im komplexen Raum** mit dem **Phasenwinkel** $-Et/\hbar$ betrachten.

$$(16.16) \quad \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, 0) \cdot e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Hier bestätigen sich die ganzen hergeleiteten Terme in reeller und komplexer Form der funktionalen Linearkombinationen mit denen unserer mit konkreten Ausgangsbedingungen versehenen unendlich vielen sinusartigen Funktionen. Und das auch noch im Quervergleich mit den entsprechenden hergeleiteten Schrödinger-Gleichungen. Genau diese ganzen mannigfaltigen Funktionen sind die **Einzelteile**, welche gebraucht werden, um die in den **Kapiteln 1-5** sowie den Kapiteln 8 und 9 untersuchten **zwei Funktionen** zusammenzuschrauben:

$$\text{r} \quad (16.17) \quad \psi(t_-) = - \left[\frac{\ln[\cot((t + \pi)/2)]}{2} + \frac{\pi + 2t}{4} \right]$$

$$\text{b} \quad (16.18) \quad \psi(t_+) = + \left[\frac{\ln[\cot(t/2)]}{2} + \frac{\pi - 2t}{4} \right]$$

Veranschaulichen wir dies bildlich zusammengefasst in folgender Grafik. Ich habe hier aus Gründen der Übersicht nur die wichtigsten Grundgleichungen dargestellt und auch die Rechteckfunktionen weggelassen. Die Farben der Funktionen entsprechen der farblichen Hinterlegungen bei den oben aufgeführten Formeln. Ich denke, dass man damit eine gute bildhafte Vorstellung der obigen Erklärungen und Argumente hinbekommt:

$$(16.07) - (16.18) \quad \text{alle } \Psi \text{ und } \psi \text{ bei:} \quad E = K$$

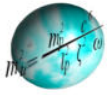
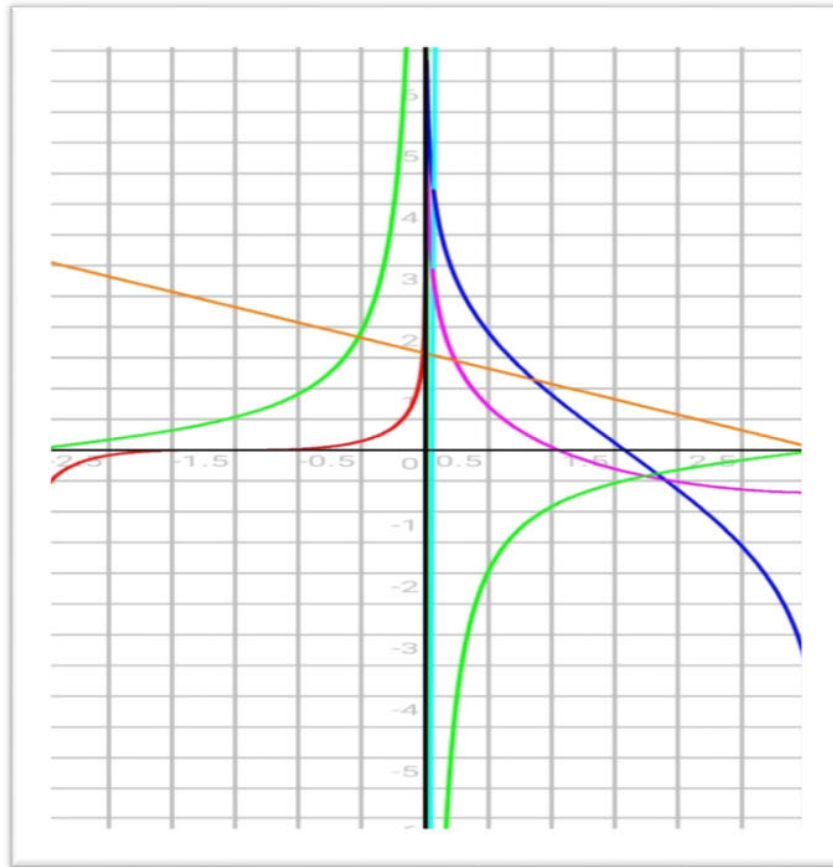
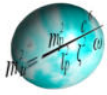


Bild 16/2: Reelle ψ -Funktionen gemäß 2. Fall im Vergleich zu Kapitel 1 (rot und blau)



Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Und dies alles über den oben untersuchten 2. Fall, wo Potentialwirkungen im gesamten Feld gegenüber der kinetischen Energie im System verschwindend sind. Die Erkenntnisse daraus haben wir für die Herleitungen der Schrödinger-Gleichungen über die Gordon-Klein-Gleichung bis hin zur **Dirac-Gleichung** erfolgreich einfließen lassen und letztendlich herausgefunden und bewiesen, dass diese Ergebnisse aus der mathematische Struktur der Dirac-Gleichung heraus die quantenmechanische Realität von **Spin-1/2-Quantensystemen** perfekt beschreiben.

**3. Fall:**

$$K \equiv \hbar \vec{\nabla} \Psi_n \vec{v} = 0$$

Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$(16.19) \quad \hbar \dot{\Psi}_n = \hbar \partial_t \Psi_n \quad \vec{\nabla} \rightarrow \partial_\phi \quad \phi \dots \text{Winkelelement}$$

Hier können jetzt wirklich alle denkbaren Wellenfunktionen zum Zuge kommen, da die beiden Gleichungsterme zueinander absolut symmetrisch sind. Denn der ganze kinetische Part fehlt mit den Winkelelementen, so dass gilt:

$$(16.20) \quad \hbar \frac{d\Psi_n}{dt} = \hbar \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \rightarrow \Psi_n = f(\text{alles mögliche})$$

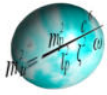
Das macht natürlich keinen Sinn und kann es auch keinen haben, da wie schon mehrfach dargestellt, die Spezielle Relativitätstheorie den energetischen Term mit der imaginären Einheit i verziert, so dass wie im 2. Fall auch hier die Taylor-Entwicklung zum Zuge kommt. Gleichung (16.19) wird dann nämlich mit den gleichen Argumenten zu:

$$(16.21) \quad V = i \hbar \partial_t \Psi \quad \sum_{k=1}^n \hbar \dot{\Psi}_n \rightarrow V \quad \sum_{k=1}^n \Psi_n(t) = \Psi(t)$$

Da dieser 3. Fall voraussetzt, dass $V = E$ ist, wird abermals unsere Euler'sche Identität einer komplexen mit einem Phasenwinkel versehenen Wellenfunktion hergeleitet:

$$(16.22) \quad \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, 0) \cdot e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Die Katze ist also nach Kapitel 10 zum zweiten Male aus dem Sack entwischt. Der Trick mit dem V , spätestens nach diesem 3. Fall, endgültig aufgefliegen:



$$(16.19) - (16.22) \quad \Psi \text{ bei: } E = V$$

Dazu nun das letzte Kapitel dieses Skriptes:

17. Da fehlt(e) noch etwas oder der nächste Wink mit dem Zaunpfahl

Wir hatten also die Gleichung (10.02) hergeleitet und dessen linker Teil als Produkt der potentiellen Energie V mit der Wellenfunktion ψ definiert. Ein Trick, um unsere totale Ableitung linearkombinierter Wellenfunktionen ψ_n in das Korsett Schrödinger-konformer Wellengleichungen zu pressen:

$$(17.01) \quad \hbar \dot{\Psi} = \hbar \vec{\nabla} \Psi \vec{v} + \hbar \partial_t \Psi \quad V \Psi = \hbar \dot{\Psi}$$

Als klassisches Differential hingeschrieben sieht dieses trickreiche Gleichnis dann so aus:

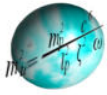
$$(17.02) \quad V \Psi = \hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

Wir unterziehen Gleichung (17.02) einem Koeffiziententausch und bilden auf beiden Seiten der Gleichung das unbestimmte Integral:

$$(17.03) \quad \frac{V}{\hbar} dt = \frac{1}{\Psi} d\Psi \quad \rightarrow \quad \frac{V}{\hbar} \int dt = \int \frac{1}{\Psi} d\Psi$$

Nun lösen wir rechts und links das Integral und setzen danach Grenzen von t_1 und t_0 sowie ψ_{t_0} und ψ_{t_1} und erhalten:

$$(17.04) \quad \frac{V}{\hbar} (t_1 - t_0) + \kappa_t = \ln \frac{\Psi_{t_1}}{\Psi_{t_0}} + \kappa_\Psi \quad \rightarrow \quad V = \frac{\hbar}{\Delta t} \left[\ln \frac{\Psi_{t_1}}{\Psi_{t_0}} + (\kappa_\Psi - \kappa_t) \right]$$



Wie könnte sich nach der obigen Formel also das Potential verhalten? Es handelt sich also hierbei um eine Zeitspanne Δt , in welcher sich eine Wellenfunktion ψ ändern kann. Nehmen wir also unsere in den Vorkapiteln für die Beschreibung der realen quantenphysikalischen Vorgänge notwendigen Wellenfunktionen und rechnen die Varianten der zeitlichen Übergänge von einer zur anderen Wellenfunktion anhand einfacher Funktionsgleichungen durch.

Als erstes nehmen wir das nichtkombinierte Beispiel einer **Cosinusfunktion**, also der allerersten Oberfrequenz mit $n = 1$, die sich während einer definierten Zeitspanne $\Delta t > 0$ in eine diskrete ($n = 1$) **abnehmende e-Funktion** transferiert:

$$\text{b (17.05)} \quad V^2 = \left[\left[\ln \left(\frac{e^{-n\Delta t}}{\cos(n\Delta t)} \right) \right] \frac{\hbar}{\Delta t} \right]^2$$

Die resultierende Integrationskonstante $\kappa = (\kappa_\psi - \kappa_t)$ ist dabei auf Null gesetzt worden. Damit wirklich nur die positiven Beträge in der Grafik erscheinen, wurde das Ergebnis quadriert.

Beim Logarithmusterm handelt es sich um das inverse Skalarprodukt aus

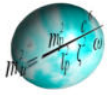
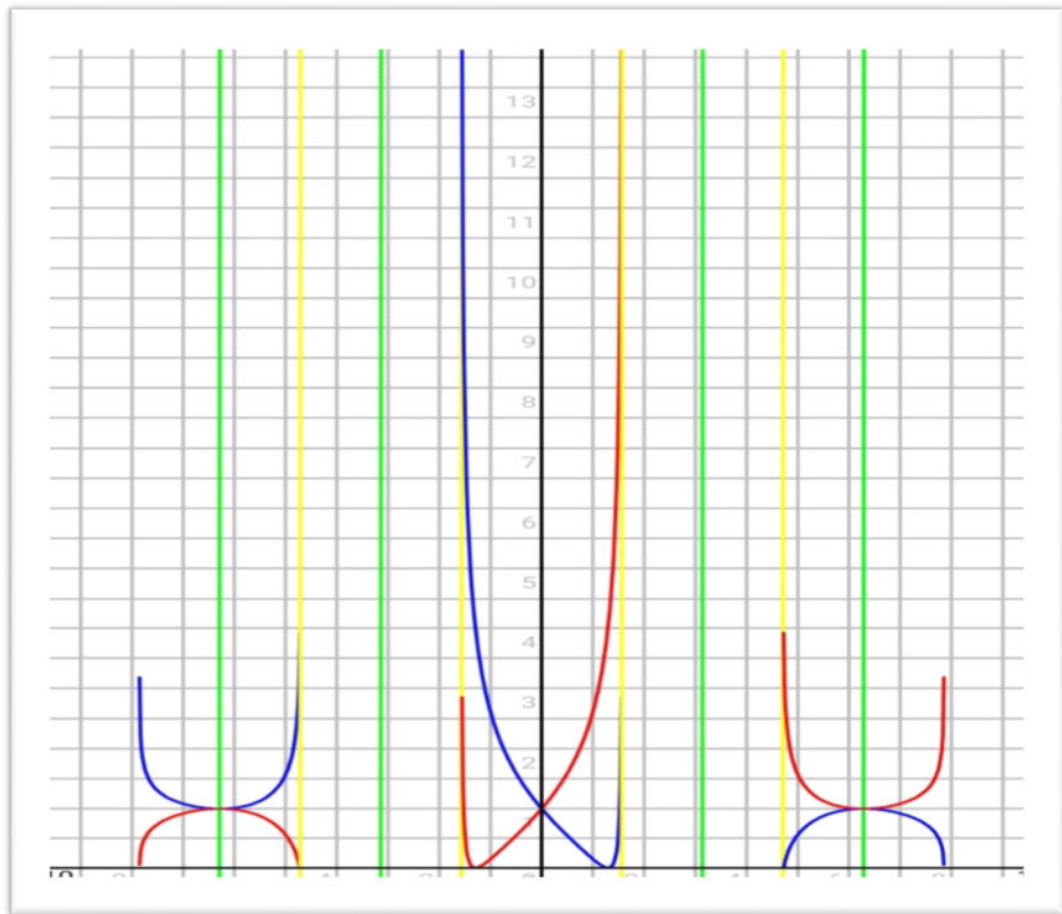
$e^{n\Delta t} \cdot \cos(n\Delta t)$ in den Grenzen von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$, wie im 1. Kapitel durch uns so definiert.

Dann knöpfen wir uns die gleichen Funktionen vor nur, dass jetzt eine **zunehmende e-Funktion** während $\Delta t > 0$ in eine **Cosinusfunktion** übergeht:

$$\text{r (17.06)} \quad V^2 = \left[\left[\ln \left(\frac{\cos(n\Delta t)}{e^{n\Delta t}} \right) \right] \frac{\hbar}{\Delta t} \right]^2$$

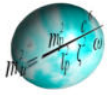
Hier handelt sich hinter dem Logarithmus also auch wieder um ein Skalarprodukt, dieses mal aus $e^{-n\Delta t} \cdot \cos(n\Delta t)$ in den Grenzen von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$, wie im 1. Kapitel definiert.

Schauen wir uns das in folgender Grafik an. Die $\pi/2$ -Intervalle sind gelb, die ganzen π -Intervalle grün gekennzeichnet. Die farbliche Codierung der Grafen stimmt mit denen vor den Formeln überein. Die Senkrechte ist die V^2 -, die Waagerechte die Δt -Achse.

Bild 17/1: Potentialverläufe V^2 der Übergänge $\cos(n\Delta t) - e^{\pm n\Delta t}$ gemäß (17.05) und (17.06)

Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Abgesehen davon, dass zur Ursprungs-Zeitachse hin das Quadratpotential auf den Wert 1 steigt, sieht man ganz deutlich, dass unmittelbar an den durch uns definierten Grenzen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ die Wahrscheinlichkeitspotentiale gegen Unendlich streben, wenn man voraussetzt, dass es einen, wie oben beschrieben, zeitlich bedingten Übergang der Cosinus-Oberschwingung zu den e-Funktionen bzw. umgekehrt gibt. Andersherum argumentiert: Wenn es einen Verlauf wie im Bild 17/1 gibt, wo im Prinzip sofort mit dem Erreichen der Definitionsgrenzen abrupt das quadratische Potential zu Unendlich strebt, muss es diese Oberschwingung-e-Funktionenübergänge geben. Und diese lassen dann wegen der Definition der dann auch unendlich großen Potentiale zwar einen **Tunneleffekt** zu, dieser fällt aber wegen des steilen Abfalls bzw. Anstieges der e-Funktion sehr gering aus. Was heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass aus unseren Definitionsbereich heraus die Wellenfunktion tunnelt ist relativ gering. Wie gering in dem Falle der Cosinus-Oberschwingung?



Im nächsten Skript werde ich diese Zusammenhänge versuchen mathematisch-physikalisch klarzustellen. Vorsicht Spoiler: Wir werden dort auf die **Feinstrukturkonstante α** stoßen, dessen einheitsloser Wert, durchaus als Wahrscheinlichkeit zu interpretieren, auch relativ gering ist: nämlich ca. Eineinhundertsiebenundreißigstel.

Das zweite Beispiel soll uns zeigen, wie es mit den quadratischen Potentialen bestellt ist, wenn ein Quantensystem im thermodynamischen Gleichgewicht, also als Linearkombination unendlich vieler sinusartigen Funktionen mit unseren definierten Randbedingungen vorliegt. Dazu nehmen wir unsere Gleichungen **r**(16.17) und **b**(16.18) und kombinieren diese im Logarithmus mit den Linearkombinationen der beiden e-Funktionen der Gleichungen **r**(16.06.1) und **b**(16.06.2)

$$\mathbf{b} \text{ (17.07)} \quad V^2 = \left[\left[\ln \left(\frac{(16.06.2)}{(16.18)} \right) \right] \frac{\hbar}{\Delta t} \right]^2 \quad \mathbf{r} \text{ (17.08)} \quad V^2 = \left[\left[\ln \left(\frac{(16.17)}{(16.06.1)} \right) \right] \frac{\hbar}{\Delta t} \right]^2$$

Sehen wir uns das unter den gleichen Aspekten wie im ersten Beispiel anhand des Bildes 17/2 an, so erkennen wir, dass auch hier die Definitionsgrenzen durch steile bis ins Unendliche reichende Quadratpotentiale abgeschildert werden. Dass sich dann beide Potentiale gegen Unendlich auch an die Ursprungszeitachse schmiegen, weist darauf hin, dass dort im Zentrum möglicherweise gar **quantengravitative Potentiale** lauern, welche, wie im Abspann dieses Skriptes dargelegt, gleichzeitig Ursache und Wirkung der unendlich großen Potentialbarrieren bei $-\pi/2$ und $+\pi/2$ sind.

Hier machen wir nämlich die Vorhersage, dass in diesem Zentralbereich, wie auch an den Definitionsgrenzen, bei minimalst kurzen Zeitspannen und damit sehr, sehr hohen Energien, die **Raumzeit gequantelt** ist, und es sich darum tatsächlich, wegen der fast unendlich schnellen Änderung des Potentials, auch um schier unendlich starke **Krümmungen der Raumzeit** und damit um die **Quantengravitation** handelt.

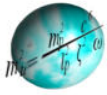
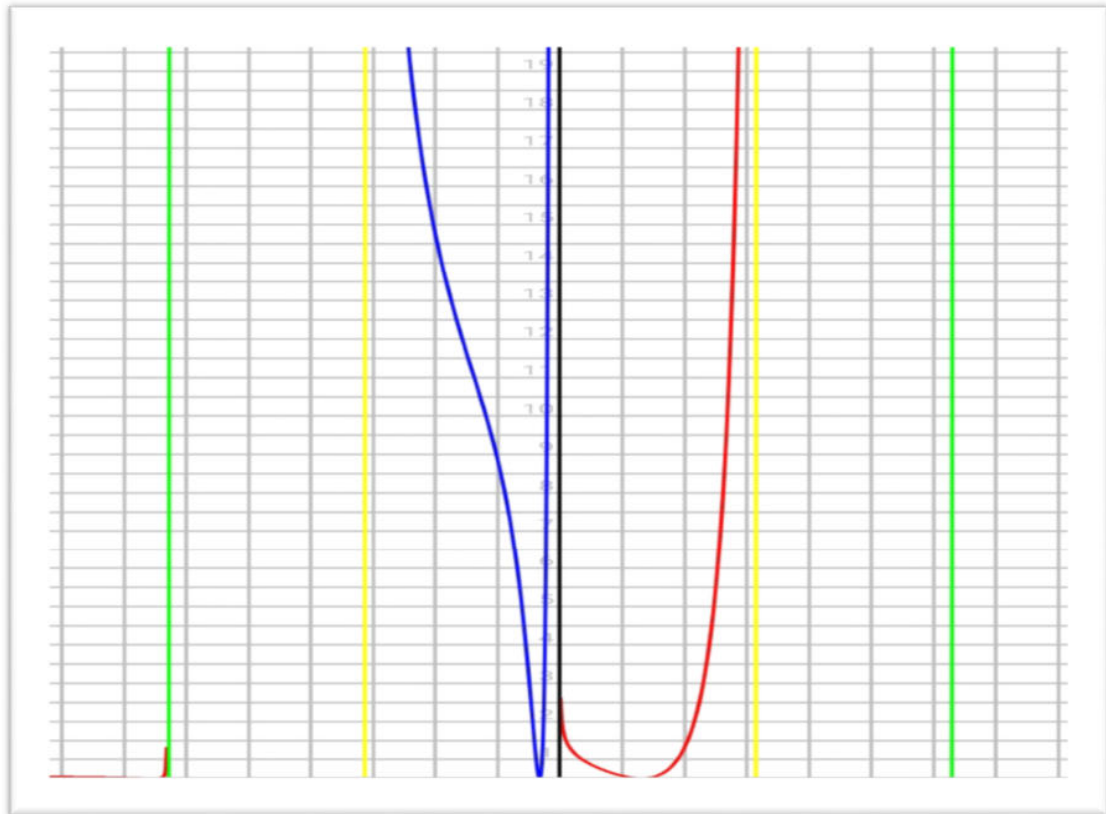


Bild 17/2: Potentialverläufe V^2 gemäß (16.17), (16.18), (16.06.1) und (16.06.2)



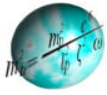
Grafik erstellt unter Verwendung der App „Funktionsplotter“, Version 1.0.6

Unser Trick mit dem Potential V und der totalen Ableitung der Wellenfunktion nach der Zeit ist also aufgeklärt. Die Formel für unser Potential lautet vollständig ausgeschrieben:

$$(17.08) \quad V = \frac{\hbar}{\Delta t} \left[\ln \frac{\Psi_{t_1}}{\Psi_{t_0}} + (\kappa_\Psi - \kappa_t) \right]$$

Wir definieren über die räumlich wirkenden Wellenfunktionen sowie einer Zeitdifferenz einen zeitlich abhängigen Krümmungsfaktor k bzw. einen Tensor R . Weiterhin fassen wir die beiden Integrationskonstanten zu einer Potentialdifferenz zusammen, welche sich in Abhängigkeit von einem festgehaltenen räumlich-zeitlichen Abstand ergeben können.

$$(17.09) \quad \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\Psi_{t_1}}{\Psi_{t_0}} = k(\Delta t) \rightarrow R \quad \Delta Pot = \frac{1}{\Delta t} (\kappa_\Psi - \kappa_t)$$



Unser **Potential V** ist damit die **Summe** einer **Potentialdifferenz** ΔPot im eigentlich nicht gekrümmten quantenphysikalischen Raum und eines **Krümmungstensors** R , welcher über die Krümmung der Raumzeit (zeitliche Änderungsraten der gleichzeitig räumlich determinierten Wellenfunktionen) zu einer **gravitativen Wirkung** gemäß der **Allgemeinen Relativitätstheorie** führt.

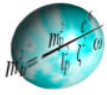
$$(17.10) \quad V = \hbar(R + \Delta Pot)$$

Während also die Potentialdifferenz relative kleine Wirkungen auf Quantensysteme und gar keine Wirkungen auf die Raumzeit hat, wirkt der Krümmungstensor R in genau den Bereichen extrem stark auf die Raumzeit ein, wo die Zeitdifferenzen bzw. Zeittakte und damit die Energien sehr hoch sind. Und das primär wegen des Faktors $(\Delta t)^{-1}$, welcher für sich alleine vor dem Logarithmus steht und nicht wie bei der Potentialdifferenz ΔPot durch die konstante Differenzbildung im weitaus größeren Spektrum gegenüber dem des Krümmungstensors immer zu weitaus geringeren zeitlich gleichbleibenden Energiewerten nivelliert wird:

$$(17.11) \quad \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\Psi_t}{\Psi_0} \rightarrow E \uparrow, \text{ wenn } \Delta t \downarrow \text{ und } \frac{\Psi_t}{\Psi_0} > 1 \quad \Delta Pot = \frac{1}{\Delta t} \kappa_{\Psi} - \frac{1}{\Delta t} \kappa_t \rightarrow E \Rightarrow$$

Solange also im Krümmungstensor der Logarithmuswert nicht 1 ist und somit das Gesamtergebnis 0 wird, sobald also die Wellenfunktionen irgendwelche zeitliche Änderungen durchlaufen, wird die Raumzeit umso stärker gekrümmt je kürzer die Zeittakte und extremer dadurch die auftretenden Energien sind. Das deckt sich mit der Allgemeinen Relativitätstheorie hervorragend, welche aussagt, dass nicht nur Massen, sondern auch Energien die Raumzeit krümmen und somit gravitative Wirkungen entfalten.

Man könnte auch über den Lorentz-Faktor γ die Differenz Δt als Zeitdilatation bzw. Schrumpfung des Zeittaktes in (17.11) interpretieren. Dann würde sich bei Geschwindigkeiten in der Nähe und bis zur Lichtgeschwindigkeit aus unserem Inertial heraus der Zeittakt bis theoretisch ins Unendliche dehnen. Dann wäre der Krümmungstensor verschwindend und damit das Potential auch. Photonen also, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen wären aus unserer

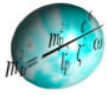


Sicht freie Teilchen, welche im gesamten Photonenfeld keinen Potentialgrenzen ausgeliefert wären. Genauso hat das auch die Schrödinger-Gleichung beschrieben.

Im Inertial eines Photons allerdings, also aus Sicht eines sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegendem Quantenteilchens, würde aus dessen Perspektive seine Uhr zwar ganz normal laufen, im Vergleich mit unserer im äußeren Inertial befindlichen Uhr dagegen aber unendlich schnell ticken, weil sich das Photon ja mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. So kommt es, dass bei selbst nur verschwindend geringsten zeitlichen Änderungen der Wellenfunktion (eine minimale Fluktuation reicht hier schon) der Krümmungstensor sofort wegen $(\Delta t)^{-1}$ energetisch explodieren würde und sich so der Raum vor den Photonen quasi immer vollständig wegkrümmt. Da nun aber aus unserer Sicht die Zeit bei den Photonen gar nicht vergeht, würden sich die Photonen für ihren nun verschwindenden Raum genauso viel unendlich schnell vergehende Zeit nehmen können wie wir sie durch ihren langen Flug durch das Universum beobachten. Aus Perspektive der Photonen würden für ihren Weg durch das Universum dann eben genauso beispielsweise acht Milliarden Jahre vergehen, wie wir aus unserer Sicht den gleichen Photonen ebenfalls unterstellen würden. Und damit wäre trotz der ganzen Allgemeinen Relativitätstheorie, Raumkrümmungen, Zeitdehnungen und zeitliches Rasen mit dem Ergebnis von gravitativen Wirkungen physikalisch für jeden inertialen Beobachter alles wieder konsistent.

Vergessen wir nicht, unser Tensor schlägt raumzeitkrümmungsmäßig nur an, wenn sich Wellenfunktionen zeitlich ändern und was das selbe ist, wenn starke Potentiale im Feld auftauchen. Wenn nicht, bleibt er wegen $\ln 1 = 0$ immer Null. Ebenso bei herkömmlichen Energien, wo die Geschwindigkeiten der Quantenteilchen gegenüber der Lichtgeschwindigkeit gering sind. Also bei längeren Zeittakten, wo wegen $(\Delta t)^{-1}$ unser Tensor auch eher gegen Null tendiert. Dabei gilt im übertragenen Sinne der hier etwas abgewandelte altbekannte Spruch der Allgemeinen Relativitätstheorie:

„Der Tensor sagt den Teilchen auf welchen Bahnen im mehr oder weniger gekrümmten Raum sie sich bewegen sollen und die Teilchen, welche Potentiale und Definitionsbereiche wie Luft zum Atmen brauchen, sagen dem Tensor wie er den Raum zu krümmen hat.“



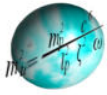
Es mangelt halt nicht an mehr oder weniger verständlichen Beispielen solcher Raumzeit-Krümmungs-Modellierungen: Auf jeden Fall aber können wir jetzt die **Allgemeine Relativitätstheorie über unser Potential V** in die **Dirac-Gleichung** einfließen lassen, so dass nicht nur Feldpotentiale und elektromagnetische Potentiale über den Dirac-Dolch $\mathcal{D}$ sondern auch der Raumzeitkrümmungstensor über $\mathcal{T}$ in der Gleichung inkludiert ist:

$$(17.12) \quad [\mathcal{D} - (R + \Delta Pot) - m] \Psi = 0 \quad \mathcal{T} = (R + \Delta Pot)$$

Vereinfacht, mit einem neuen schicken, nun auch zur Raumzeitkrümmung fähigen Operator, sieht das Ganze dann so aus:

$$(\mathcal{D} - \mathcal{T} - m) \Psi = 0$$

Jetzt klärt sich auch endgültig die Frage, wie es denn zu den Definitionsbereichen (wir nannten diese auch Potentialgrenzen) vom Anfang dieses Skriptes kommen konnte. Und zwar von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ und das zweimal, weil in einer unendlichen Schleife mit einem Phasenversatz von π zurückgespiegelt. Dieser 2π -Definitionsbereich, in welchen die Weltlinien der Quantenteilchen und Quantensysteme, jedes in seinem ihm eigen zustehenden Inertial, um ihre Ursprungszeitachsen in genau definierten Abständen durch Raum und Zeit rotieren. Denn nur durch diese rigorose Grenzsetzung kommt Ordnung ins System der Energieerhaltung. Nur so entstehen die Bedingungen für diskrete Quantensysteme, stehende Wellen als Ausgangsbedingungen für Fermionen mit Spin $1/2$, Bosonen mit Spin 1 und 0 , für das skalare elementare Higgs-Boson, freie Teilchen, freie Bosonen wie das Photon, für den ganzen Teilchenzoo, also für das Standardmodell der Quantenphysik. Keine absolut perfekte Ordnung, sonst gäbe es die Materie, so wie wir sie kennen nicht. Es kommt nämlich die Asymmetrie über sowohl die Punkt- und Achsenspiegelung als auch dem $\pi/2$ -Phasenversatz der zweieiigen Zwillinge Cosinus- und Sinuswellen ins Spiel. Und dazu noch die Festlegungen ihrer Strukturen und damit ihrer Energien und Amplituden wegen der über allem stehenden Bedingung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.



Was also zwingt die Quantensysteme in ihre Schranken? Sind sie eingesperrt? Sind sie gar aneinander gekettet? Oder haben sie sich einfach ihrem Schicksal ergeben? Nichts von alledem! Der Grund sind die durch die Quantensysteme generierten Energien, welche die Raumzeit krümmen und damit die Teilchenbahnen, deren rotierende Weltlinien und damit ihre Potentialgrenzen genauso und nicht anders vorgeben. Die Teilchen gehen halt wie immer nur den Weg des geringsten Widerstandes bzw. den der maximalen Eigenzeit, um mit Albert Einstein anzugeben. Unsere intuitive Setzung der Definitionsgrenzen und Ausgangsbedingungen haben ursächlich nur etwas mit den mathematischen Erfordernisse der Allgemeinen Relativitätstheorie zu tun.

Damit schließt sich nun der Kreis mit den Einlassungen des 1. Kapitels dieses Skriptes endgültig. Die allerletzte Wirkung ist zur allerersten Ursache geworden, sinnbildlich mit ihr verschmolzen. Wären jede Ursache und jede Wirkung einschließlich der Verschmelzung ein abzählbarer Einheitsvektor der Größe Eins, hätte unser geschlossener Kreis eine ungerade Zahl zum Ergebnis. Selbst wenn man die Ursachen und Wirkungen ausschließlich der Verschmelzung immer wieder in theoretisch unendlich viele einzelne Ursachen und Wirkungen aufspalten würde, unser geschlossener, unendlich abzählbarer Kreis wäre immer ungerade. Der ungerade erste und gleichzeitig letzte Vektor: Eine Superposition aus Ursache und Wirkung. Die Null wäre in diesem Kontext die eindimensionale Naht zwischen der letzten Ursache und der mit der ersten Ursache superponierten letzten Wirkung.

Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar, unendlich groß aber ungerade? Diese schier unscheinbare aber reale Asymmetrie, welche die Materie, also uns, erschaffen hat?

In diesem Sinne: Denken wir mal darüber nach!

Michael Heilmann

Berlin, im August 2026